



**Titre:** Synthèse et validation d'un système de commandes de vol robuste et autoséquenté  
Title:

**Auteur:** Hugo Lhachemi  
Author:

**Date:** 2013

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Lhachemi, H. (2013). Synthèse et validation d'un système de commandes de vol robuste et autoséquenté [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1306/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1306/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Guchuan Zhu, & David Saussié  
Advisors:

**Programme:** Génie aérospatial  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SYNTHÈSE ET VALIDATION D'UN SYSTÈME DE COMMANDES DE VOL  
ROBUSTE ET AUTOSÉQUENCÉ

HUGO LHACHEMI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE AÉROSPATIAL)  
DÉCEMBRE 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

SYNTHÈSE ET VALIDATION D'UN SYSTÈME DE COMMANDES DE VOL  
ROBUSTE ET AUTOSÉQUENCÉ

présenté par : LHACHEMI Hugo

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., président

M. ZHU Guchuan, Doct., membre et directeur de recherche

M. SAUSSIÉ David, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. LE NY Jérôme, Ph.D., membre

*À mes parents.*



## REMERCIEMENTS

Le travail ici présenté a été effectué avec l'appui financier du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) et du Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT). Je remercie ces organismes de m'avoir octroyé une bourse d'étude m'ayant permis de réaliser ce projet.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux directeurs de recherche. M. Guchuan Zhu en premier lieu pour m'avoir encadré dès les premiers mois de mon arrivée au Canada et de m'avoir encouragé dans l'entreprise de ce projet de recherche. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant de s'être autant investi pour mon dossier personnel dans le cadre de la mise en place de ce projet et du partenariat avec Bombardier Aerospace. Je souhaite également remercier M. David Saussié pour avoir accepté d'assurer la codirection de mon projet. Son soutien sans faille, sa disponibilité permanente et son enthousiasme sont pour beaucoup dans la réussite de ce projet. Mes directeurs de recherche, de par leur passion, leur expérience et leur générosité, ont fait de ce projet de Maîtrise une étape marquante de mon parcours académique. Ils m'ont donné le goût de la recherche et transmis leur passion pour l'Automatique, m'amenant à poursuivre l'expérience dans le cadre d'un Ph.D.

Je tiens également à remercier M. Yann Le Masson de Bombardier Aerospace pour m'avoir recruté sur le projet HIS-IMA (*Highly Integrated Systems - Integrated Modular Avionics*). Il m'a ainsi offert l'opportunité de travailler pour un avionneur de renommée mondiale et d'en apprendre beaucoup sur les processus et exigences qui sont inhérentes au développement d'un programme d'avion. Je tiens également à le remercier pour sa gentillesse et son professionnalisme. Je remercie également l'ensemble des personnes que j'ai pu côtoyer dans les locaux de Bombardier Aerospace. Je pense tout particulièrement à Mme Jessica Allard-Bernier pour son aide, sa gentillesse et sa bonne humeur.

Je remercie ensuite les membres du jury, M. Lahcen Saydy et M. Jérôme Le Ny d'avoir accepté de lire mon mémoire et de participer à la soutenance. Je tiens à remercier plus amplement M. Lahcen Saydy pour les cours qu'il a pu me dispenser au cours de ma Maîtrise. De par sa rigueur et sa passion, il m'a initié à plusieurs domaines d'étude de l'Automatique et a grandement participé à me donner le goût de la recherche.

Je remercie les personnels administratifs de l'École Centrale de Lyon et de l'École Polytechnique de Montréal qui ont rendu possible la réalisation de ce double diplôme. Je pense particulièrement à Mme Brigitte Pavone, Mme Suzanne Lebel, Mme Nathalie Lévesque, Mme Marie-Pier Elias et M. Olivier Grenier pour leur professionnalisme. De même, je remercie le personnel technique de la Section Automation et Systèmes du département de génie électrique, tout particulièrement Mme Marie-Lyne Brisson, sans qui ce projet n'aurait pu aboutir.

Je remercie mes collègues du laboratoire et en particulier Donald Lam avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler sur le projet HIS-IMA. Je tiens également à mentionner mes amis qui m'ont soutenu au cours de ce projet et fait de ces deux premières années au Canada une expérience inoubliable : Jenna, Mathilde, Rémi, Sophie, Thibault, Thomas et Vincent. Mention spéciale à Olaf pour son enthousiasme et sa joie de vivre.

Je souhaite remercier Florent et Vincent, deux amis qui me sont très chers et qui ne cessent de me soutenir et de m'encourager en toutes circonstances depuis maintenant plus de 11 ans.

Je voudrais remercier Anne, pour m'accepter tel que je suis, et de faire de chaque instant un petit moment de bonheur.

Mes derniers remerciements vont à ma famille qui m'a toujours encouragé et motivé. J'ai une pensée toute particulière pour mes parents à qui je dédie ce mémoire. Tout ce que j'ai réalisé jusqu'à aujourd'hui est le fruit de leur soutien et de leurs sacrifices.

## RÉSUMÉ

La synthèse des systèmes de commandes de vol demeure un problème complexe soumis à de multiples contraintes d'architecture, de performances et de processus de certification. Les contrôleurs doivent assurer la stabilité et les performances de l'avion dans toute l'enveloppe de vol, et ce en dépit des erreurs de modélisation, des incertitudes paramétriques (masse, centrage, coefficients aérodynamiques) et des perturbations.

Du fait du caractère hautement non linéaire de la dynamique de l'avion et de sa forte sensibilité vis-à-vis de la condition de vol, les paramètres du contrôleur doivent être soigneusement ajustés en fonction du point d'opération courant de l'avion. Parmi les solutions proposées dans la littérature, la technique dite du séquençement des gains demeure la plus populaire dans le domaine de l'industrie aéronautique. De plus, il est courant de privilégier des architectures de contrôle classiques dérivées de l'expérience des avionneurs. L'objectif de ce projet de recherche est de développer une méthode visant à synthétiser un système de commandes de vol robuste et autoséquenté à architecture fixe. La problématique ainsi définie se situe au confluent de trois domaines de l'Automatique : la synthèse à architecture fixe par retour de sortie, la commande robuste et le contrôle de systèmes LPV via la méthode du séquençement des gains.

Dans une première partie, on s'attache à développer un modèle non linéaire de la dynamique de l'avion en tâchant de prendre explicitement en compte l'influence de la masse et du centrage. Ce modèle est ensuite linéarisé dans le cadre du vol en croisière autour d'un point d'équilibre. À cet effet, un modèle numérique du *Fighting Falcon F-16* est développé pour analyser l'influence de la masse et du centrage sur la dynamique de l'avion.

Dans une seconde partie, une méthode de synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquenté à architecture fixe est mise en place. Cette méthode se base sur les capacités de synthèse multimodèle des méthodes  $H_\infty$  structurées et consiste en une transposition des problèmes de synthèse robuste et de séquençement des gains en des contraintes  $H_\infty$ . Cette méthode est appliquée avec succès au contrôle du mode *Short Period* de la dynamique longitudinale du F-16 sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. La reformulation du problème de synthèse dans le cadre de l'optimisation multiobjectif permet, via l'introduction de coefficients de pondération dans la phase de synthèse, de significativement améliorer les performances du système bouclé sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

Finalement, la stabilité et les performances du système en boucle fermée sont évaluées sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Des méthodes d'analyse pour les systèmes LTI et LPV sont mises en œuvre afin de garantir la stabilité et les performances du système pour des conditions de vol et configurations incertaines, stationnaires ou variant dans le temps. De nombreuses simulations portant sur le modèle non linéaire complet de l'avion viennent conclure l'analyse, permettant d'évaluer la stabilité et les performances du schéma de contrôle développé.

## ABSTRACT

Flight control system development remains a very challenging issue due to architectural complexity, stringent performance requirements, and strict certification processes. Such control systems must ensure the global stability and the required performance within the whole flight envelope, even in the presence of modeling errors, parametric uncertainties, environmental fluctuations, and disturbances.

As the dynamic behavior of an aircraft is highly nonlinear and varies significantly with the flight condition, controller parameters must be adequately adjusted based on the operating point. Among the viable solutions for this purpose, one can find gain-scheduling control, which is one of the most well-known techniques widely adopted in aerospace industry. In addition, it is of practical interest from an industrial point of view to leverage the legacy accumulated in the past by imposing a priori the controller structure based on classical flight control system architectures. The present research project aims at developing a procedure for the design and the validation of robust gain-scheduled flight control systems with a fixed structure. This problem is located at the junction of three topics in control, namely synthesis of fixed-structure control systems, robust control, and LPV systems control in the gain-scheduling framework.

In the first phase of this research project, a nonlinear dynamic model of an aircraft that explicitly takes into account mass and center of gravity (CG) position is established. This model is linearized around a trim condition in cruise flight. A numerical model of the F-16 Fighting Falcon is then derived and the impact of mass and CG position variations on the aircraft dynamics is analyzed.

In the second phase, a method for the design of a robust and self-scheduled controller with a predefined architecture is proposed. Based on the multi-model synthesis capability of structured  $H_\infty$  methods, robustness and gain-scheduling issues are both cast into the framework of structured  $H_\infty$  synthesis. This approach is successfully applied to the control of the short period mode over the whole flight envelope under mass uncertainties and CG variations. By reformulating the design problem in the multi-objective optimization framework, the introduction of weighting coefficients in the synthesis procedure is considered. This results in an important performance enhancement of the closed-loop system.

Finally, the overall performance and the global stability of the closed-loop system is validated over the flight envelope for time invariant and time varying flight conditions and uncertain configurations, including mass parameters and aerodynamic coefficient, by means of  $\mu$  analysis and IQC robustness analysis. An extensive numerical simulation study is carried out with the nonlinear model and the results are used to assess the stability and the performance of the developed control schemes.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xx
LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS . . . . .	xxi
PRÉAMBULE . . . . .	xxvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Objectifs de la recherche . . . . .	3
1.3 Plan du mémoire . . . . .	5
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE ET OBJECTIFS . . . . .	6
2.1 Revue de littérature . . . . .	7
2.1.1 Modélisation du problème . . . . .	7
2.1.2 Synthèse de contrôleurs robustes et autoséquencés à architecture fixe . . . . .	8
2.1.3 Méthodes de validation dans le domaine de l'aéronautique . . . . .	11
2.2 Objectifs et contributions . . . . .	13
2.2.1 Objectif 1 : modélisation et analyse de l'impact des variations de cen- trage sur la dynamique de l'avion . . . . .	13
2.2.2 Objectif 2 : mise en place et application d'une méthode de synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquencé à architecture fixe . . . . .	14

2.2.3	Objectif 3 : validation du système de commande obtenu lors de la phase de synthèse . . . . .	15
CHAPITRE 3 MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DE L'AVION . . . . .		17
3.1	Modélisation de l'atmosphère . . . . .	18
3.2	Modèle dynamique de l'avion . . . . .	19
3.2.1	Repères de référence et définition des angles . . . . .	19
3.2.2	Équations vectorielles de la dynamique de l'avion . . . . .	23
3.2.3	Forces et moments extérieurs . . . . .	24
3.2.4	Modèle non linéaire de la dynamique longitudinale . . . . .	27
3.3	Modèle dynamique linéaire du vol en croisière . . . . .	28
3.3.1	Le vol de type croisière . . . . .	29
3.3.2	Développement des équations scalaires . . . . .	30
3.3.3	Représentation d'état . . . . .	33
3.3.4	Découplage des équations . . . . .	35
3.3.5	Dérivées de stabilité adimensionnées . . . . .	36
CHAPITRE 4 ANALYSE EN BOUCLE OUVERTE . . . . .		37
4.1	Premières propriétés du F-16 et mise en évidence des modes de l'avion . . . . .	37
4.1.1	Instabilité aérodynamique du F-16 en boucle ouverte . . . . .	37
4.1.2	Modes de la dynamique longitudinale . . . . .	38
4.1.3	Modes de la dynamique latérale . . . . .	39
4.2	Impact du centrage sur la dynamique de l'avion . . . . .	41
4.2.1	Impact des déplacements latéraux . . . . .	41
4.2.2	Impact des déplacements longitudinaux . . . . .	43
4.2.3	Impact des déplacements verticaux . . . . .	46
4.2.4	Conclusion sur les variations de centrage . . . . .	48
4.3	Impact des variations de masse sur la dynamique de l'avion . . . . .	48
4.3.1	Dynamique longitudinale . . . . .	48
4.3.2	Dynamique latérale . . . . .	49
4.4	Conclusion sur le centrage et la masse . . . . .	50
CHAPITRE 5 «SHORT PERIOD» ET STRATÉGIE DE CONTRÔLE . . . . .		51
5.1	Architecture de contrôle d'un avion . . . . .	51
5.2	Mode «Short Period» . . . . .	52
5.2.1	Facteur de charge . . . . .	52
5.2.2	Approximation du «Short Period» . . . . .	54



5.3	Cahier des charges . . . . .	58
5.4	Stratégie de contrôle . . . . .	60
5.4.1	Architecture du contrôleur . . . . .	60
5.4.2	Fonctions de transfert en boucle fermée . . . . .	62
5.4.3	Représentation d'état du système en boucle fermée . . . . .	63
CHAPITRE 6 DE LA SYNTHÈSE $H_\infty$ AU DESIGN DE CONTRÔLEURS ROBUSTES		
	ET AUTOSÉQUENCÉS . . . . .	65
6.1	Formulation et résolution classique du problème $H_\infty$ . . . . .	65
6.1.1	Forme standard . . . . .	65
6.1.2	Problème $H_\infty$ . . . . .	66
6.1.3	Résolution classique du problème $H_\infty$ . . . . .	67
6.1.4	Limitations des approches $H_\infty$ classiques . . . . .	67
6.2	Approche $H_\infty$ structurée . . . . .	67
6.2.1	Problème $H_\infty$ structuré . . . . .	68
6.2.2	Fonction MATLAB <code>hinfstruct</code> . . . . .	69
6.2.3	Exemple de mise en œuvre . . . . .	74
6.3	Système LPV et problème de séquençement des gains . . . . .	76
6.3.1	Séquençement <i>a posteriori</i> des gains . . . . .	77
6.3.2	Synthèse de contrôleurs LPV autoséquencés . . . . .	77
6.3.3	Autoséquençement via la synthèse $H_\infty$ structurée . . . . .	80
CHAPITRE 7 SYNTHÈSE DE SYSTÈMES DE COMMANDES DE VOL ROBUSTES		
	ET AUTOSÉQUENCÉS . . . . .	85
7.1	Transcription du cahier des charges dans le formalisme $H_\infty$ . . . . .	86
7.1.1	Formulation des contraintes $H_\infty$ . . . . .	86
7.1.2	Validation des contraintes $H_\infty$ et de l'architecture de contrôle . . . . .	87
7.1.3	Ajustement du modèle de référence . . . . .	89
7.2	Synthèse préliminaire . . . . .	90
7.2.1	Synthèse de contrôleurs robustes . . . . .	91
7.2.2	Séquençement <i>a posteriori</i> des gains . . . . .	95
7.3	Synthèse d'un système de commandes de vol robuste et autoséquencé . . . . .	98
7.3.1	Transposition du problème de séquençement dans le formalisme $H_\infty$ . . . . .	98
7.3.2	Synthèse du contrôleur robuste et autoséquencé . . . . .	100
7.4	Approche normalisée . . . . .	103
7.4.1	Optimisation multiobjectif . . . . .	104
7.4.2	Ajustement automatisé des coefficients de pondération . . . . .	107

7.5	Performances des contrôleurs autoséquencés . . . . .	110
7.5.1	Contrôleur séquencé <i>a posteriori</i> . . . . .	111
7.5.2	Contrôleur autoséquencé . . . . .	111
7.5.3	Contrôleur autoséquencé - normalisation 1 . . . . .	112
7.5.4	Contrôleur autoséquencé - normalisation 2 . . . . .	112
CHAPITRE 8 VALIDATION DU SYSTÈME DE COMMANDES DE VOL . . . . .		118
8.1	Robustesse LTI . . . . .	119
8.1.1	$\mu$ -analyse . . . . .	120
8.1.2	Application et résultats . . . . .	123
8.2	Robustesse LPV . . . . .	129
8.2.1	Revue théorique sur les IQC . . . . .	130
8.2.2	«Toolbox» IQC $\beta$ . . . . .	136
8.2.3	Application et résultats . . . . .	140
8.3	Réponses temporelles sur le modèle non linéaire . . . . .	149
8.3.1	Condition de vol fixe . . . . .	150
8.3.2	Vitesse fixe . . . . .	151
8.3.3	Profil de vitesse . . . . .	153
8.3.4	Variation des paramètres de masse et de centrage . . . . .	157
CHAPITRE 9 CONCLUSION . . . . .		165
9.1	Résultats et discussion . . . . .	165
9.2	Perspectives . . . . .	166
9.3	Bilan . . . . .	167
RÉFÉRENCES . . . . .		168
ANNEXES . . . . .		174

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Caractéristiques des modes de la dynamique longitudinale . . . . .	39
Tableau 4.2	Vecteurs propres des modes de la dynamique longitudinale . . . . .	39
Tableau 4.3	Caractéristiques des modes de la dynamique latérale . . . . .	40
Tableau 4.4	Vecteurs propres des modes de la dynamique latérale . . . . .	40
Tableau 5.1	Comparaisons des pôles du mode <i>Short Period</i> avec leur approximation	56
Tableau 7.1	Impact de $\omega_{n,\text{ref}}$ sur le pic $\gamma$ atteint par $H(s)$ après minimisation . . . .	90
Tableau 7.2	Synthèse préliminaire : norme $H_\infty$ obtenue pour chaque condition de vol	92
Tableau 7.3	Synthèse préliminaire : partie réelle du pôle dominant . . . . .	96
Tableau 7.4	Synthèse préliminaire : amortissement minimal . . . . .	96
Tableau 7.5	Synthèse préliminaire : marge de phase minimale ( $^\circ$ ) . . . . .	96
Tableau 7.6	Synthèse préliminaire : marge de gain minimale (dB) . . . . .	96
Tableau 7.7	Synthèse préliminaire : marge de retard minimale (ms) . . . . .	96
Tableau 7.8	Séquencement <i>a posteriori</i> des gains : valeur des <i>R-square</i> . . . . .	97
Tableau 7.9	Synthèse <i>a posteriori</i> : norme $H_\infty$ obtenue pour chaque condition de vol	98
Tableau 7.10	Synthèse <i>a priori</i> : évolution de la norme $H_\infty$ de $H(s)$ . . . . .	100
Tableau 7.11	Synthèse <i>a priori</i> normalisée 1 : évolution de la norme $H_\infty$ de $H(s)$ . .	106
Tableau 7.12	Synthèse <i>a priori</i> normalisée 1 : norme $H_\infty$ de $H_l(s)$ . . . . .	107
Tableau 7.13	Synthèse <i>a priori</i> normalisée 2 : évolution de la norme $H_\infty$ de $H(s)$ . .	110
Tableau 7.14	Synthèse <i>a priori</i> normalisée 2 : norme $H_\infty$ de $H_l(s)$ . . . . .	110
Tableau 8.1	Plages de variation des paramètres incertains . . . . .	119
Tableau 8.2	Complexités des modèles LFT pour l'analyse de stabilité robuste . . . .	126
Tableau 8.3	Gains de la performance en poursuite lorsque les paramètres de masse et de centrage varient rapidement dans le temps . . . . .	142
Tableau 8.4	Gains de la performance en poursuite en présence d'un retard de 15 ms aux niveaux des mesures et d'un retard de 10 ms à la sortie du contrôleur	148
Tableau A.1	Valeurs de $R_c$ rendant la dynamique longitudinale singulière . . . . .	178
Tableau A.2	Caractéristiques de l'ellipse pour laquelle la dynamique latérale linéa- risée du vol en croisière est singulière . . . . .	179
Tableau A.3	Coefficients aérodynamiques adimensionnés de la dynamique longitu- dinale . . . . .	180
Tableau A.4	Coefficients aérodynamiques adimensionnés de la dynamique latérale .	180
Tableau A.5	Lien entre les dérivées de stabilité classiques et les dérivées de stabilité adimensionnées de la dynamique longitudinale . . . . .	182

Tableau A.6	Lien entre les dérivées de stabilité classiques et les dérivées de stabilité adimensionnées de la dynamique latérale . . . . .	183
Tableau B.1	Dimensions du F-16 . . . . .	184
Tableau B.2	Performances du F-16 . . . . .	184
Tableau B.3	Paramètres de masse du F-16 . . . . .	184
Tableau B.4	Propulsion du F-16 . . . . .	185
Tableau B.5	Modélisation des gouvernes du F-16 . . . . .	185
Tableau D.1	Synthèse préliminaire : pulsation naturelle du modèle de référence $\omega_{n,\text{ref}}$	190
Tableau D.2	Synthèse préliminaire : gain $K_i$ . . . . .	190
Tableau D.3	Synthèse préliminaire : gain $K_p$ . . . . .	190
Tableau D.4	Synthèse préliminaire : gain $K_q$ . . . . .	191
Tableau D.5	Synthèse préliminaire : pulsation naturelle du <i>Roll-off</i> $\omega_n$ . . . . .	191
Tableau D.6	Synthèse préliminaire : amortissement du <i>Roll-off</i> $\xi$ . . . . .	191
Tableau E.1	Résultats de l'analyse IQC des performances en poursuite pour des conditions de vol variant dans le temps . . . . .	192

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Définition des angles d'Euler . . . . .	21
Figure 3.2	Repères stabilité et aérodynamique . . . . .	21
Figure 4.1	Modes de la dynamique longitudinale . . . . .	39
Figure 4.2	Modes de la dynamique latérale . . . . .	40
Figure 4.3	Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de $\Delta y$ . . . . .	42
Figure 4.4	Lieu des racines de la dynamique longitudinale en fonction de $\Delta x$ . . . . .	43
Figure 4.5	Caractéristiques du mode <i>Short Period</i> en fonction de $\Delta x$ . . . . .	44
Figure 4.6	Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de $\Delta x$ . . . . .	45
Figure 4.7	Lieu des racines de la dynamique longitudinale en fonction de $\Delta z$ . . . . .	47
Figure 4.8	Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de $\Delta z$ . . . . .	47
Figure 4.9	Lieu des racines de la dynamique longitudinale en fonction de la masse . . . . .	49
Figure 4.10	Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de la masse . . . . .	49
Figure 5.1	Boucles de contrôle d'un avion . . . . .	51
Figure 5.2	Comparaison des diagrammes de Bode de la sortie $N_z$ entre dynamique longitudinale et approximation <i>Short Period</i> . . . . .	57
Figure 5.3	Comparaison des diagrammes de Bode de la sortie $q$ entre dynamique longitudinale et approximation <i>Short Period</i> . . . . .	57
Figure 5.4	Comparaison de l'implémentation d'un contrôleur entre dynamique longitudinale et approximation <i>Short Period</i> . . . . .	58
Figure 5.5	Enveloppe de vol $\Theta$ . . . . .	59
Figure 5.6	Architecture classique pour le contrôle du facteur de charge . . . . .	61
Figure 5.7	Architecture du contrôleur . . . . .	62
Figure 6.1	Forme standard . . . . .	65
Figure 6.2	Problème $H_\infty$ standard . . . . .	66
Figure 6.3	Illustration du caractère non lisse des problèmes min-max . . . . .	72
Figure 6.4	Moteur à courant continu . . . . .	74
Figure 6.5	Modèle augmenté du moteur à courant continu pour la synthèse $H_\infty$ structurée . . . . .	74
Figure 6.6	Réponse du moteur à courant continu en boucle fermée avec le contrôleur PI ajusté via <code>hinfstruct</code> . . . . .	76
Figure 6.7	Système sous forme standard . . . . .	81
Figure 7.1	Modèle augmenté du système . . . . .	88
Figure 7.2	Comparaison des synthèses $H_\infty$ classique et $H_\infty$ structurée . . . . .	89

Figure 7.3	Impact de $\omega_{n,\text{ref}}$ sur la réponse temporelle de l'avion en boucle fermée .	90
Figure 7.4	Discrétisation de l'enveloppe de vol $\Theta$ et du domaine incertain $\Delta$ . . .	91
Figure 7.5	Gains obtenus lors de la synthèse préliminaire . . . . .	93
Figure 7.6	Synthèse préliminaire : réponses temporelles en boucle fermée pour la condition de vol $V_T = 0.7 \text{ M}$ , $h = 5000 \text{ m}$ . . . . .	94
Figure 7.7	Synthèse préliminaire : diagramme de Bode évaluant la stabilité du système en entrée de l'actionneur . . . . .	94
Figure 7.8	Intégration du problème de séquençement des gains dans l'architecture du contrôleur . . . . .	99
Figure 7.9	Répartition des 35 conditions de vols testées . . . . .	101
Figure 7.10	Synthèse <i>a priori</i> : réponses temporelles en boucle fermée pour 175 configurations . . . . .	102
Figure 7.11	Synthèse <i>a priori</i> : placement des pôles en boucle fermée pour 4410 configurations . . . . .	103
Figure 7.12	Évolution des paramètres d'ajustement des pondérations au fil des itérations . . . . .	109
Figure 7.13	Contrôleur séquencé <i>a posteriori</i> : caractéristiques modales . . . . .	114
Figure 7.14	Contrôleur séquencé <i>a posteriori</i> : marges de stabilité . . . . .	114
Figure 7.15	Contrôleur autoséquencé : caractéristiques modales . . . . .	115
Figure 7.16	Contrôleur autoséquencé : marges de stabilité . . . . .	115
Figure 7.17	Contrôleur autoséquencé - normalisation 1 : caractéristiques modales .	116
Figure 7.18	Contrôleur autoséquencé - normalisation 1 : marges de stabilité . . . .	116
Figure 7.19	Contrôleur autoséquencé - normalisation 2 : caractéristiques modales .	117
Figure 7.20	Contrôleur autoséquencé - normalisation 2 : marges de stabilité . . . .	117
Figure 8.1	Interconnexion $M\text{-}\Delta$ . . . . .	120
Figure 8.2	Cône de performance $\mathcal{D}_{\alpha,\xi}$ . . . . .	121
Figure 8.3	Interconnexion $M\text{-}\Delta$ pour l'analyse de performances robustes . . . .	122
Figure 8.4	Structure de l'interconnexion des LFT du système en boucle fermée . .	123
Figure 8.5	Procédure d'obtention du modèle LFT pour la $\mu$ -analyse . . . . .	124
Figure 8.6	Découpage de l'enveloppe de vol en 3 parties à des fins de modélisation des points d'équilibre . . . . .	126
Figure 8.7	$\mu$ -analyse : résultat pour la stabilité robuste sur l'ensemble de l'enveloppe de vol . . . . .	127
Figure 8.8	$\mu$ -analyse : résultat pour la stabilité robuste des performances modales pour $\alpha = 0.5$ et $\xi = 0.3$ . . . . .	128

Figure 8.9	$\mu$ -analyse : résultat pour la stabilité robuste des performances modales pour $\alpha = 1$ et $\xi = 0.4$ . . . . .	128
Figure 8.10	$\mu$ -analyse : résultat de la performance en poursuite pour $1/\rho = 0.45$ . .	129
Figure 8.11	Interconnexion pour l'analyse de stabilité dans le cadre des IQC . . . .	132
Figure 8.12	Interconnexion pour l'étude des performances via les IQC . . . . .	134
Figure 8.13	Décomposition du modèle du moteur en boucle fermée pour l'analyse IQC . . . . .	137
Figure 8.14	Moteur DC : gain de la performance en poursuite pour une résistance variant dans le temps . . . . .	139
Figure 8.15	Structure de l'interconnexion du système en boucle fermée pour des variations de masse et de centrage . . . . .	140
Figure 8.16	Impact de la vitesse de variation de la masse de l'avion sur les performances en poursuite . . . . .	144
Figure 8.17	Impact de la vitesse de variation de la position longitudinale du centre de gravité sur les performances en poursuite . . . . .	144
Figure 8.18	Impact de la vitesse de variation des trois paramètres de masse sur la performance en poursuite . . . . .	144
Figure 8.19	Structure de l'interconnexion du système en boucle fermée pour des variations de condition de vol . . . . .	145
Figure 8.20	Impact de variations limitées du nombre de Mach sur la performance en poursuite . . . . .	147
Figure 8.21	Impact des retards dans les mesures sur la performance en poursuite du système en boucle fermée . . . . .	147
Figure 8.22	Impact des retards au niveau du contrôleur sur la performance en poursuite du système en boucle fermée . . . . .	148
Figure 8.23	Modèle utilisé pour les simulations sur le modèle non linéaire . . . . .	150
Figure 8.24	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour la condition de vol ( $V_T = 0.65$ M, $h = 5000$ m) et pour 35 configurations de masse et centrage . . . . .	151
Figure 8.25	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour 35 conditions de vol et 5 configurations de masse et centrage . . . . .	152
Figure 8.26	Profil de vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M . . . . .	153
Figure 8.27	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M à une altitude initiale de 7500 m en l'absence d'input de contrôle pour 35 configurations de masse et centrage . . . . .	155

Figure 8.28	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M à une altitude initiale de 7500 m lors d'un doublet pour 35 configurations de masse et centrage . . . . .	156
Figure 8.29	Évolution des gains du contrôleur pour une vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M à une altitude initiale de 7500 m lors d'un doublet pour 35 configurations de masse et centrage . . . . .	157
Figure 8.30	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une vitesse de 0.65 M à une altitude initiale de 5000 m en rejet de la perturbation induite par un largage de matériel pour plusieurs déplacements du centre de gravité . . . . .	159
Figure 8.31	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour 35 conditions de vol en rejet de la perturbation induite par un largage de matériel dans la configuration la plus défavorable . . . . .	161
Figure 8.32	Profils de vitesse de l'avion pour l'étude du largage de matériel lors d'une manœuvre . . . . .	162
Figure 8.33	Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une opération de largage de matériel au cours d'une manœuvre et sous l'effet d'une accélération . . . . .	163



## LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Modélisation de la dynamique de l'avion - compléments . . . . .	174
Annexe B	Modélisation du <i>Fighting Falcon F-16</i> . . . . .	184
Annexe C	Obtention du modèle numérique de la dynamique linéarisée du F-16 . .	188
Annexe D	Gains de la synthèse préliminaire . . . . .	190
Annexe E	Analyse des performances en poursuite pour des conditions de vol variant dans le temps . . . . .	192

## LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

### Acronymes

BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i>
CG	Centre de Gravité
ECI	<i>Earth Centered Inertial</i>
IQC	<i>Integral Quadratic Constraint</i>
LPV	<i>Linear Parameter Varying</i>
LFT	<i>Linear Fractionnal Transformation</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i>
MIMO	<i>Multi-Input Multi-Output</i>
NACA	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i>
NED	<i>North East Down</i>
PI	Proportionnel Intégral
PID	Proportionnel Intégral Dérivé
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>

### Mécanique du vol

- Repères :

$\mathcal{R}_I = (\mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I, \mathbf{z}_I)$	Repère ECI
$\mathcal{R}_e = (\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e, \mathbf{z}_e)$	Repère NED
$\mathcal{R}_b = (\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b)$	Repère avion
$\mathcal{R}_s = (\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$	Repère stabilité
$\mathcal{R}_a = (\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a)$	Repère aérodynamique

- Points caractéristiques :

$G$	Centre de gravité de l'avion
$O$	Point de référence lié statiquement à l'avion
$T$	Point d'application de la résultante de la poussée des moteurs

- Caractéristiques physiques de l'avion :

$b$	Envergure de l'avion
$\bar{c}$	Corde aérodynamique moyenne

$h$	Altitude de vol
$\mathbf{I}$	Matrice d'inertie de l'avion
$l_x$	Position du pilote relativement au point $O$ selon l'axe $\mathbf{x}_b$
$m$	Masse de l'avion
$m_0$	Masse nominale de l'avion
$S$	Surface des ailes
$\Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$	Position du centre de gravité $G$ relativement au point $O$

- Paramétrage de l'avion :

$N_z, n_z$	Facteur de charge, grandeur linéarisée
$P, p$	Vitesse de rotation en roulis, grandeur linéarisée
$Q, q$	Vitesse de rotation en tangage, grandeur linéarisée
$R, r$	Vitesse de rotation en lacet, grandeur linéarisée
$U, u$	Vitesse du point $O$ selon l'axe $x$ , grandeur linéarisée
$V, v$	Vitesse du point $O$ selon l'axe $y$ , grandeur linéarisée
$V_T$	Vitesse du point $O$
$W, w$	Vitesse du point $O$ selon l'axe $z$ , grandeur linéarisée

- Forces appliquées à l'avion :

$C$	Force aérodynamique latérale selon l'axe $\mathbf{x}_a$
$D$	Force aérodynamique de traînée
$L$	Force aérodynamique de portance
$F_T$	Force de poussée
$X_a$	Force aérodynamique selon l'axe $x$
$Y_a$	Force aérodynamique selon l'axe $y$
$Z_a$	Force aérodynamique selon l'axe $z$

- Moments appliqués à l'avion :

$L_a$	Moment aérodynamique en roulis
$L_T$	Moment engendré par la poussée en roulis
$M_a$	Moment aérodynamique en tangage
$M_T$	Moment engendré par la poussée en tangage
$N_a$	Moment aérodynamique en lacet
$N_T$	Moment engendré par la poussée en lacet

- Coefficients aérodynamiques de l'avion :

$C_D$	Coefficient de traînée
$C_C$	Coefficient des efforts latéraux
$C_L$	Coefficient de portance
$C_l$	Coefficient du moment aérodynamique en roulis
$C_m$	Coefficient du moment aérodynamique en tangage
$C_n$	Coefficient du moment aérodynamique en tangage
$C_x$	Coefficient des efforts aérodynamique selon l'axe $x$
$C_y$	Coefficient des efforts aérodynamique selon l'axe $y$
$C_z$	Coefficient des efforts aérodynamique selon l'axe $z$

- Surfaces de contrôle :

$\delta_a$	Angle de braquage des ailerons
$\delta_e$	Angle de braquage de la gouverne de profondeur
$\delta_r$	Angle de braquage de la gouverne de direction
$\delta_t$	Position de la manette des gaz
$\delta_{LEF}$	Angle de braquage du dispositif hypersustentateur

- Angles caractéristiques :

$\alpha$	Angle d'attaque
$\alpha_e$	Angle d'attaque à l'équilibre
$\alpha_T$	Angle entre la poussée et l'axe $\mathbf{x}_b$ du repère avion
$\alpha_x$	Angle d'attaque relativement au repère stabilité
$\beta$	Angle de dérapage
$\gamma$	<i>Flight path angle</i> - pente du vecteur vitesse
$\Phi, \phi$	Angle de cap, grandeur linéarisée
$\Theta, \theta$	Angle d'assiette, grandeur linéarisée
$\Psi, \psi$	Angle de gîte, grandeur linéarisée

- Modélisation de l'atmosphère :

$a$	Vitesse du son
$g$	Accélération de la pesanteur
$M_{\text{air}}$	Masse molaire de l'air
$P_{\text{atm}}$	Pression atmosphérique
$R$	Constante des gaz parfaits

$T$	Température de l'air
$T_0$	Température de l'air au niveau de la mer
$\gamma$	Coefficient adiabatique de l'air
$\lambda$	Gradient de température
$\rho$	Densité de l'air
$\rho_0$	Densité de l'air au niveau de la mer

### Système de commandes de vol

- Conditions de vol :

$\Delta$	Domaine incertain des paramètres de masse et de centrage
$\Theta$	Enveloppe de vol

- Variables de contrôle :

$N_{zc}$	Commande du facteur de charge
$\delta_{ec}$	Commande de la gouverne de profondeur

- Architecture du contrôleur :

$cf$	Coefficient intermédiaire $cf = 2\xi/\omega_n$
$F_{\text{roll}}$	<i>Roll-off</i>
$G_{\text{ref}}$	Modèle de référence
$K_p$	Gain proportionnel
$K_i$	Gain intégral
$K_q$	Gain de retour sur $q$
$\xi$	Amortissement du <i>Roll-off</i>
$\xi_{\text{ref}}$	Amortissement du modèle de référence
$\omega_n$	Pulsation naturelle du <i>Roll-off</i>
$\omega_{n,\text{ref}}$	Pulsation naturelle du modèle de référence

### Analyse de stabilité et performances robustes

- $\mu$ -analyse :

$\Delta$	Bloc d'incertitude des modèles LFT
----------	------------------------------------

- Analyse par IQC :

$\Delta$	Opérateur incertain défini de $\mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[$ dans $\mathbf{L}_{2e}^m[0, +\infty[$
$\Pi$	Matrice hermitienne définie de $j\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{l+m \times l+m}$

## Notations mathématiques

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices à coefficients réels à $n$ lignes et $m$ colonnes
$\mathbf{RL}_\infty$	Ensemble des fonctions scalaires, rationnelles et propres à coefficients réels
$\mathbf{RH}_\infty$	Sous-ensemble des fonctions de $\mathbf{RL}_\infty$ dont les pôles sont à partie réelle strictement négative
$\mathcal{S}^n$	Ensemble des matrices carrées de taille $n$ symétriques à coefficients réels
$\mathcal{H}^n$	Ensemble des matrices hermitiennes de taille $n$
$\mathbf{L}_2^l[0, +\infty[$	Ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^l$ de carré intégrable
$\mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[$	Ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^l$ de carré intégrable sur tout intervalle $I \subset [0, +\infty[$ de longueur fini
$Co(X)$	Enveloppe convexe de l'ensemble $X$
$\text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$	Spectre complexe de la matrice $A$
$\lambda_1(A)$	Plus grande valeur propre de la matrice $A$
$\bar{\sigma}(A)$	Plus grande valeur singulière de la matrice $A$
$\partial_c f$	Dérivée de Clarke de la fonction $f$

## PRÉAMBULE

Ce projet a été supporté par l'*Industrial Innovation Scholarship*, programme offert conjointement par le NSERC et le FQRNT à travers un partenariat universitaire entre l'École Polytechnique de Montréal (EPM) et Bombardier Aerospace. Deux aspects ont été traités au cours de ce projet : un premier concernait la synthèse et la validation de systèmes de commande de vol et le second portait sur l'intégration de systèmes de commande sur des calculateurs embarqués. Les deux facettes de ce projet m'ont amené à travailler à la fois dans les laboratoires de la Section Automation et Systèmes du département de génie électrique de l'EPM et les locaux de Bombardier Aerospace.

Le premier aspect de ce projet est l'objet du présent mémoire. Le second aspect concernait l'intégration des système de contrôle d'un avion dans le cadre d'un projet pilote de Bombardier et dont le sujet est : *Impact de l'architecture d'une plateforme intégrée de criticalité mixte sur les algorithmes de contrôle*. De plus en plus de suites avioniques tendent à être intégrés (*Integrated Modular Avionics* (IMA)). L'objectif de Bombardier est de pousser cette intégration à d'autres systèmes de contrôle ayant divers niveaux de criticalité sur une plate-forme générique nommée HIS-IMA (*Highly Integrated Systems - Integrated Modular Avionics*). Ce projet, mené au sein d'une équipe de quatre personnes, comportait les aspects suivants :

- étudier le processus de définition des requis concernant la plateforme et les applications de contrôle ;
- explorer les impacts sur les lois de contrôle d'une architecture *Timed-Triggered* distribuée et partitionnée ;
- approfondir les analyses de sécurité devant être effectuées dans le cadre de l'intégration d'applications de contrôle sur une plate-forme HIS-IMA ;
- mettre en place un démonstrateur composé de 5 calculateurs (3 VxWorks653 de WindRiver et 2 CEPIOM-R de Thales) montés sur un réseau *Timed-Triggered-Ethernet* (TTTech) ;
- simuler plusieurs applications de contrôle utilisant des ressources de calcul et de réseau partagées : estimation du niveau de kérosène, transferts de kérosène, alimentation des moteurs, gestion du centrage de l'avion.

Loin d'être arrivé à son terme, ce projet devrait prendre de l'ampleur dans les prochaines années. L'objectif poursuivi est d'atteindre la maturité suffisante afin de déployer des plateformes HIS-IMA sur l'une des prochaines générations d'avions de Bombardier Aerospace.

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Contexte

Dans le domaine de l'aviation, les commandes de vol désignent l'ensemble des systèmes faisant le lien entre les consignes du pilote et les surfaces aérodynamiques de l'avion afin d'en modifier la trajectoire. Ces systèmes peuvent être répartis en 3 grandes catégories :

- les organes de pilotage qui sont directement actionnés par le pilote (manche, pédales) ;
- les actionneurs dont l'objectif est d'ajuster la position des gouvernes de l'avion (vérins, moteurs) ;
- la chaîne de transmission qui est en charge d'assurer la liaison entre les organes de pilotage et les actionneurs.

Depuis les premiers avions jusqu'aux avions légers actuels, la chaîne de transmission est assurée par un système de câblage mécanique. L'effort exercé par le pilote sur les organes de pilotage est alors directement répercuté sur les gouvernes. La taille croissante des avions a nécessité l'introduction de systèmes hydrauliques d'assistance afin de démultiplier la force exercée par le pilote. Le développement de servovalves électro-hydrauliques dont la fiabilité s'est accrue au cours des décennies, combiné à l'essor des calculateurs numériques, a permis de remplacer progressivement les commandes de vol classiques par des commandes de vol électriques (ou *Fly-by-wire* en anglais). Dans cette configuration, les commandes du pilote sont converties en signaux électriques et transmises par un réseau de câbles électriques à l'ordinateur de vol. Ce dernier détermine alors comment actionner les différentes gouvernes afin d'obtenir le comportement désiré de l'avion. Dans cette configuration, les commandes de vol électriques permettent également à l'ordinateur de contrôler les gouvernes de l'avion en l'absence de commande du pilote. Citons l'exemple du pilote automatique ou de la mise en place de systèmes de contrôle qui, en se basant sur les grandeurs mesurées au cours du vol, permettent de venir améliorer les performances de l'avion.

Le premier avion expérimental ayant testé la technologie des commandes de vol électriques, à travers le contrôle des surfaces aérodynamiques par des signaux électriques, fut l'avion russe Tupolev ANT-20 au milieu des années 1930. Il fallut ensuite attendre le premier vol du Avro CF-105 Arrow, avion intercepteur canadien, en 1958 pour qu'un premier avion non expérimental intègre une technologie de contrôle via les commandes de vol électriques.



Le premier système volant muni de commandes de vol électriques sans système mécanique ou hydraulique de secours fut le LLRV (*Lunar Landing Research Vehicle*), aéronef conçu afin d'entraîner les astronautes du programme spatial américain Apollo à atterrir sur la Lune. La démocratisation de cette technologie intervint tout d'abord dans le domaine militaire. Le premier avion de combat ayant bénéficié de cette technologie fut le Mirage IV afin de contrôler la dérive de l'appareil. Au début des années 1970, les chasseurs américains F-15 et F-16 furent les premiers à intégrer cette technologie en série. Au niveau des avions civils, le premier à intégrer les commandes de vol électriques sous la forme de signaux analogiques fut le Concorde en 1969. Ce n'est qu'en 1987 qu'un avion civil, l'Airbus A320, intégra des commandes de vol électriques numériques, révolutionnant ainsi le monde de l'aviation commerciale. Pour la première fois, le cockpit de l'avion était entièrement numérisé avec commandes de vol purement électriques. Boeing, soucieux de ne pas se laisser distancer, lança en 1994 le B-777, premier avion de la firme intégrant complètement ces technologies.

La technologie des commandes de vol électriques a permis de révolutionner le monde de l'aviation civile et militaire. Son intégration a permis de réduire significativement le poids des avions via le remplacement des systèmes mécaniques et hydrauliques par des systèmes électriques et électro-mécaniques. Cette réduction du poids entraîna la diminution des coûts d'utilisation et de maintenance des avions. Au niveau du pilotage, elle permirent l'introduction de lois de commande venant améliorer la manœuvrabilité et les performances de l'avion sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Elles permirent également d'améliorer la sécurité des avions en introduisant la notion de protection de l'enveloppe de vol. Cela consiste en un ensemble de fonctions assurant que l'avion ne puisse pas voler dans des configurations à risques telles que des vitesses trop faibles, des angles d'attaque proches de l'angle de décrochage, des vols à altitudes trop élevées... Dans le domaine de l'aviation militaire, l'introduction des commandes de vol électriques a permis de réduire significativement la taille des surfaces stabilisant l'avion sur sa trajectoire. Les principaux bénéfices d'une telle diminution sont la réduction du poids et de la signature radar de l'avion, ainsi que d'une manœuvrabilité accrue. Finalement, les commandes de vol électriques permettent de stabiliser des avions qui sont aérodynamiquement instables. De telles configurations présentent un intérêt tout particulier dans le domaine de l'avion militaire car source d'une meilleure efficacité aérodynamique.

Parallèlement au développement de la technologie des commandes de vol électriques, divers critères ont été développés afin d'assurer la bonne manœuvrabilité de l'avion. Ces critères, appelés qualités de vol et de manœuvrabilité, correspondent à un ensemble de contraintes que le système en boucle fermée doit satisfaire de manière à assurer un pilotage aisé de l'avion.

Temps de réponse, amortissement, marges de stabilité, critères sur les réponses temporelles et fréquentielles sont autant de contraintes que le système doit satisfaire en boucle fermée afin d'être conforme aux normes en vigueur.

Les critères de performances doivent être satisfaits sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Un seul contrôleur ne pouvant rencontrer le cahier des charges, la solution classique est d'avoir recours à la technique du séquençement des gains. Dans une telle approche, les gains du contrôleur sont exprimés comme des fonctions dépendantes de variables de séquençement (altitude, vitesse, angle d'attaque). Les gains du contrôleur sont alors calculés en temps réel en fonction de la condition de vol courante de l'avion. Il s'agit donc de synthétiser un contrôleur séquencé rencontrant les performances imposées par le cahier des charges sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

De plus, certains paramètres de l'avion sont incertains et variant dans le temps. C'est par exemple le cas des paramètres tels que la masse, la position du centre de gravité et la matrice d'inertie. Ces paramètres sont amenés à lentement varier au cours du vol à travers la consommation des moteurs et les transferts de kérosène. Dans le cas d'un largage de matériel (e.g. missile), ces paramètres peuvent être amenés à varier rapidement et de façon significative. Le contrôleur séquencé à travers l'enveloppe de vol doit donc également être robuste aux variations des paramètres incertains (paramètres de masse et de centrage, coefficients aérodynamiques).

## 1.2 Objectifs de la recherche

L'objectif principal de ce projet est de développer une méthode visant à synthétiser un système de commandes de vol autoséquencé et robuste aux variations des paramètres de masse et de centrage pour une architecture de contrôle fixe.

Dans un premier temps, une modélisation tenant explicitement compte de la masse de l'avion et de la position de son centre de gravité doit être effectuée. En effet, la dynamique d'un avion est décrite relativement à un point de référence pris classiquement comme étant le centre de gravité de l'avion. Dans l'approche ici développée, ce point est supposé incertain et possiblement variant dans le temps. Il ne peut donc pas être choisi comme point de référence. La dynamique de l'avion doit alors être décrite relativement à un point de référence  $O$  lié statiquement à l'avion. Cette approche doit conduire à l'obtention des équations de la

dynamique de l'avion avec un offset sur la position du centre de gravité. L'analyse numérique de ce modèle pour l'exemple du *Fighting Falcon F-16* doit alors nous permettre d'identifier le mode de l'avion le plus sensible quant aux variations de masse et de centrage.

Dans un second temps, le problème du contrôle robuste de ce mode pour des variations de masse et de la position longitudinale du centre de gravité est considéré. Une architecture de contrôle, adaptée d'architectures de contrôle classiques est alors introduite. Cette architecture se doit d'être suffisamment riche afin de permettre de satisfaire certains critères de performances, tout en demeurant d'un ordre raisonnable pour des raisons d'implémentation. En se basant sur cette architecture, on cherche alors à synthétiser un contrôleur séquencé et robuste aux variations de masse et de centrage assurant les performances du système en boucle fermée sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. L'approche classique dite du séquençement de gains consisterait à discrétiser l'enveloppe de vol en un nombre fini de points de vol, de synthétiser pour chacun d'entre eux un contrôleur robuste rencontrant le cahier des charges, de les stocker dans des *lookup tables* et de procéder à un séquençement *a posteriori* des gains via des interpolations multilinéaires. Une telle approche présente plusieurs désavantages. Elle n'apporte aucune garantie sur le bon fonctionnement du système de commandes de vol entre deux points de design. Les gains sont des fonctions affines par morceaux des variables de séquençement, rendant le travail de validation fastidieux. Finalement, les *lookup tables* peuvent présenter des irrégularités, compliquant ainsi la phase d'interpolation. Dans ce projet, nous essaierons de développer une méthode dans laquelle la phase de séquençement des gains est considérée non pas *a posteriori*, i.e. de manière postérieure à la phase de synthèse des contrôleurs, mais *a priori*, i.e. en même temps que la phase de synthèse, sous la forme de fonctions polynomiales ou rationnelles des variables de séquençement. L'objectif est ainsi de mettre en place et d'appliquer au cas du *Fighting Falcon F-16* une méthode permettant d'effectuer la synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquencé pour une architecture de contrôle définie *a priori*.

Finalement, le bon comportement du contrôleur ainsi synthétisé doit être vérifié à travers l'enveloppe de vol et pour des paramètres de masse et des coefficients aérodynamiques incertains. Il s'agit de valider dans un premier temps le bon comportement du système lorsque les conditions de vol et paramètres incertains sont stationnaires. Dans un second temps, une validation plus réaliste tenant compte des possibles variations des conditions de vol et paramètres de masse sera mise en place.

### 1.3 Plan du mémoire

La première partie du mémoire est consacrée à la modélisation et à l'analyse de l'impact des paramètres de masse et de centrage sur la dynamique de l'avion. Nous développons dans le Chapitre 3 les équations de la dynamique d'un avion faisant explicitement intervenir la masse et le centrage. Elles aboutissent à la mise en place d'un modèle dynamique non linéaire complet de la dynamique longitudinale et d'un modèle linéarisé rendant compte des dynamiques longitudinale et latérale. Nous étudions ensuite au cours du Chapitre 4 l'impact des variations de masse et de centrage sur la dynamique du F-16 en boucle ouverte via l'étude de lieux des racines. Cette étude va nous pousser à nous concentrer sur l'étude du mode *Short Period* pour des variations de masse et de centrage.

La seconde partie du mémoire est quant à elle consacrée à la synthèse et à la validation d'un contrôleur robuste et autoséquenté dont l'architecture est fixée *a priori*. Suite aux conclusions de la première partie, le mode *Short Period* est introduit plus en détail au cours du Chapitre 5. Dans un souci de réduire la complexité du problème, l'approximation dite du *Short Period* est introduite. Un cahier des charges est alors défini et une architecture de contrôle proposée. De brefs rappels sur le problème  $H_\infty$  et ses méthodes de résolution classiques sont effectués au Chapitre 6. Les méthodes  $H_\infty$  structurées, permettant d'ajuster des contrôleurs à architecture fixe pour minimiser des contraintes  $H_\infty$ , sont alors présentées. On montre comment il est possible de tirer avantage de telles méthodes afin de résoudre le problème de synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquenté à architecture fixée *a priori*. Le Chapitre 7 met en application ces différentes méthodes afin d'effectuer la synthèse d'un tel contrôleur pour le mode *Short Period* du F-16. On montre ensuite comment le problème ici considéré peut être reformulé dans le cadre de l'optimisation multiobjectif. Cela conduit à l'introduction de coefficients de pondération afin de donner plus de poids à certains sous-domaines de l'enveloppe de vol et ainsi venir ajuster les performances du contrôleur à travers l'enveloppe de vol. Le Chapitre 8 est consacré à la validation du contrôleur synthétisé précédemment. Pour cela, des méthodes d'analyse sont mises en œuvre afin de valider le comportement du système sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain. Une attention toute particulière est portée à la validation des configurations variant dans le temps. Finalement, des simulations sur le modèle non linéaire complet de l'avion sont effectuées afin de vérifier le bon comportement temporel du système en boucle fermée.

Enfin, le Chapitre 9 tient lieu de conclusion, faisant le bilan sur les objectifs accomplis au cours de ce projet et les possibles perspectives.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LITTÉRATURE ET OBJECTIFS

Nous débutons ce mémoire par une revue de littérature visant à faire l'état de l'art concernant les différents problèmes abordés dans ce projet et qui ont été évoqués en introduction.

L'objectif initial du projet était d'effectuer la synthèse de systèmes de commandes de vol robustes quant aux variations de masse et de centrage. Nous nous attarderons donc tout d'abord sur le problème de la modélisation de la dynamique de l'avion. On étudiera ensuite cette dernière en se posant la question de l'impact de la masse et du centrage.

La synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquenté pour une architecture de contrôle fixée *a priori* est au confluent de trois domaines d'étude de l'automatique : le problème de synthèse robuste, le problème de synthèse à architecture fixe et le problème de séquençement des gains. Le problème de synthèse robuste traite de la synthèse de contrôleurs pour un système dont le modèle nominal est soumis à des incertitudes. Le problème de synthèse à architecture fixe s'inscrit dans la lignée des problèmes de synthèse par retour de sortie et à ordre fixe. Finalement, le problème de séquençement des gains entre en jeu lorsqu'un système doit être contrôlé sur un large domaine d'opération pour lequel un seul contrôleur ne suffit pas pour assurer les performances du système bouclé. L'ensemble de ces trois points seront adressés au cours de la revue de littérature.

Postérieurement à la phase de synthèse, une phase complète de validation sera nécessaire afin de prouver le bon fonctionnement du système en boucle fermée. De manière à identifier les outils existants et mis en œuvre dans l'industrie aéronautique, une revue de littérature portant sur les méthodes de validation des systèmes de commandes de vol a été effectuée.

Fort de cette revue de littérature, nous définirons les objectifs du projet ainsi que les contributions apportées.

## 2.1 Revue de littérature

### 2.1.1 Modélisation du problème

La modélisation de la dynamique d'un avion en tant que corps rigide à 6 degrés de liberté a largement été traitée. Mentionnons à titre d'exemple les livres de McRuer *et al.* (1973), Nelson (1997) et Stevens et Lewis (2003). De manière standard, ces modélisations présentent trois gouvernes que sont les ailerons, la gouverne de profondeur et la gouverne de direction. Ils font de plus intervenir la manette des gaz qui permet de contrôler la poussée des moteurs. Certaines modélisations font intervenir des gouvernes supplémentaires. C'est par exemple le cas du F-16 qui présente un dispositif hypersustentateur disposé au niveau des ailes dans le but d'apporter un supplément de portance à l'avion lorsqu'il vole à trop basse vitesse (Nguyen *et al.* (1979)). Des modélisations plus complexes existent et peuvent prendre en compte divers types de phénomènes. Mentionnons par exemple la possibilité de prendre en compte les modes flexibles de l'avion (Bucharles et Vacher (2002)).

Une grande partie de ces modélisations ne prend pas en considération le problème de variation de la masse et de la position du centre de gravité sur la dynamique de l'avion. De telles variations se produisent néanmoins tout au long du vol de par la consommation des moteurs et les transferts de kérosène entre les différentes cuves de l'avion (Miao *et al.* (2012)). Dans le cadre d'applications militaires, de brusques changements de masse et de centrage sont également à considérer pour des opérations de type largage de matériel (Yang *et al.* (2010)). Le livre de Etkin et Reid (1995) prend en compte de potentielles variations de la position longitudinale du centre de gravité de l'avion au niveau des moments aérodynamiques. À travers l'étude du lieu des racines, il montre le fort impact qu'exerce le centrage de l'avion sur sa dynamique longitudinale. Ce phénomène est largement connu dans le cas du F-16 qui est aérodynamiquement instable dans sa configuration nominale (Stevens et Lewis (2003)). Une approche permettant de mieux tenir compte de l'impact de la position du centre de gravité sur la dynamique de l'avion a été proposée par Zhang *et al.* (2009). Dans celle-ci, le centrage de l'avion est supposé incertain. Il en résulte que le centre de gravité ne peut pas être choisi comme étant le point de référence de la modélisation. Les équations de la dynamique de l'avion sont alors dérivées sous forme vectorielle par rapport à un point de référence  $O$  lié statiquement à l'avion. Ces équations vectorielles constituent le point de départ de notre modélisation.

### 2.1.2 Synthèse de contrôleurs robustes et autoséquencés à architecture fixe

Le problème de synthèse de systèmes de commandes de vol robustes et autoséquencés à architecture fixe est un problème complexe au confluent de plusieurs domaines d'étude de l'automatique. La résolution d'un tel problème présente un intérêt pratique avec de potentielles applications dans le milieu industriel. Les différents aspects de ce problème, ainsi que leurs intérêts respectifs sont détaillés ci-dessous.

#### 2.1.2.1 Synthèse robuste

La synthèse robuste vise à la mise en place de contrôleurs permettant d'assurer la robustesse et les performances du système en boucle fermée en dépit des incertitudes du modèle. Dans le cas de l'avion, il s'agit d'élaborer un contrôleur qui soit robuste aux variations de masse et de centrage de manière à assurer la stabilité et les performances de l'appareil à travers l'ensemble du domaine incertain (Hentabli *et al.* (2003)).

L'élaboration d'un contrôleur robuste passe classiquement par les méthodes de synthèse  $H_\infty$ . Initiées par Zames (1981) puis développées par Doyle (1982) au début des années 1980, les méthodes  $H_\infty$  peuvent être résumées en un problème de stabilisation et de rejet de perturbations. On cherche ainsi à stabiliser internement le système en boucle fermée tout en minimisant l'énergie de certains signaux. Dans une telle approche, les contraintes temporelles et fréquentielles du cahier des charges sont introduites via des filtres de pondération. Pour plus de détails sur les fondements théoriques et la mise en œuvre des méthodes de synthèse  $H_\infty$ , on pourra se reporter à la référence (Zhou et Doyle (1998)). De manière à résoudre numériquement le problème de synthèse  $H_\infty$ , divers algorithmes ont été développés. Celui qui semble à l'heure actuelle le plus adapté numériquement a été proposé par Doyle *et al.* (1989), reposant sur le formalisme de la représentation d'état. Parmi les autres contributions notables, mentionnons que certaines méthodes permettent de travailler avec des caractérisations de type LMI (Gahinet et Apkarian (1994)), conduisant néanmoins à un effort numérique plus important.

Les méthodes  $H_\infty$  classiques ne permettent pas d'assurer *a priori* la stabilité du système vis-à-vis des incertitudes du modèle. De manière à garantir la stabilité et les performances du système pour l'ensemble des valeurs possibles des paramètres incertains, des méthodes dite de  $\mu$ -analyse et de  $\mu$ -synthèse ont été développées. Ces méthodes nécessitent préalablement la réécriture du problème sous la forme d'une *Linear Fractionnal Transformation* (LFT) supérieure afin d'extraire les incertitudes du modèle et les rassembler au sein d'une matrice

incertaine  $\Delta$ . Dans cette configuration, la  $\mu$ -analyse permet d'analyser la stabilité et les performances du système en dépit de la matrice incertaine  $\Delta$  (Doyle (1982)). La  $\mu$ -synthèse cherche quant à elle à synthétiser un contrôleur assurant la stabilité et les performances du système en dépit de la matrice incertaine  $\Delta$ . Les méthodes de résolution d'un tel problème de synthèse passent par une procédure itérative appelée *D-K itération*. Elle consiste à alterner entre une synthèse  $H_\infty$  classique comme décrite précédemment et le calcul de matrices de *scaling*. Parmi les contribution notables dans ce domaine, mentionnons (Zhou et Doyle (1998)). Ces méthodes présentent le désavantage d'être très coûteuses en temps de calcul et de n'apporter aucune garantie quant à leur convergence.

Bien que simple dans sa formulation, la synthèse  $H_\infty$  classique mène à l'obtention de contrôleurs d'ordre élevé, rendant difficile leur implémentation sur des architectures de calcul temps réel. Une réduction de l'ordre du contrôleur est alors généralement nécessaire, pouvant conduire à une nette dégradation des performances. Ces limitations ont poussé les chercheurs à développer des méthodes de synthèse de contrôleurs à architecture fixe afin de minimiser des critères  $H_\infty$ .

#### 2.1.2.2 Synthèse à architecture fixe

La synthèse d'un contrôleur à architecture fixe correspond à un problème de stabilisation par retour de sortie pour une architecture définie *a priori*. Afin de résoudre ce problème, de nombreuses méthodes ont été développées au cours des dernières décennies (Blondel *et al.* (1995); Syrmos *et al.* (1997)). Parmi les plus simples mentionnons les méthodes de positionnement de pôles via le lieu des racines ou les critères algébriques de type Routh-Hurwitz (Dorf et Bishop (2010)). Parmi les plus sophistiquées, mentionnons celles faisant intervenir la résolution d'inégalités matricielles dans le cadre de la théorie de Lyapunov (Rugh (1996)) ou des méthodes d'optimisation non lisse (Burke et Overton (1994)).

Le problème de synthèse à architecture fixe peut se voir augmenté du problème de synthèse robuste. Dans cette configuration, le contrôleur doit être ajusté à partir d'une architecture prédéfinie de façon à ce que le système en boucle fermée rencontre les performances de manière robuste quant aux incertitudes du modèle. Les résultats en matière de commande robuste obtenus par Kharitonov (1981) et plus encore par Saydy *et al.* (1990) à travers la mise en place de l'outil d'analyse robuste que constitue la théorie des applications gardiennes peuvent être mis en œuvre pour résoudre ce type de problème (Saussié *et al.* (2010)). L'extension des méthodes  $H_\infty$  classiques au problème de synthèse à architecture fixe aboutissent classiquement à la résolution de BMI (*Bilinear Matrix Inequality*) (Safonov *et al.* (1994)). La



complexité accrue de ces méthodes de synthèse  $H_\infty$  à architecture fixe ont poussé le développement de méthodes venant directement ajuster les gains du contrôleur afin de minimiser des contraintes  $H_\infty$ . Le problème de synthèse  $H_\infty$  à architecture fixe étant non lisse et non convexe, des méthodes ayant recours à des techniques d'analyse non lisse (Clarke *et al.* (1998); Clarke (2013)) ont été développées donnant lieu aux méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurées (Apkarian et Noll (2006, 2007)). Parmi les contributions les plus notables à l'heure actuelle, mentionnons la *toolbox* HIFOO (Burke *et al.* (2006)) ainsi que la fonction `hinfstruct` intégrée dans la *Robust Control Toolbox* de MATLAB (Gahinet et Apkarian (2011a)).

En plus de résoudre le problème de synthèse  $H_\infty$  à architecture fixe, les méthodes  $H_\infty$  structurées permettent d'effectuer une synthèse dite multimodèle. Alors que classiquement la synthèse d'un contrôleur s'effectue à partir d'un unique modèle de référence, les méthodes  $H_\infty$  structurées permettent d'effectuer la synthèse d'un contrôleur en considérant plusieurs modèles à la fois ((Gahinet et Apkarian, 2011a,b)). Cette capacité de synthèse multimodèle peut être mise à profit dans le cadre de la synthèse de contrôleurs robustes (Puyou et Ezerzere (2012)).

### 2.1.2.3 Séquencement des gains

Les méthodes considérées jusqu'à présent permettent de synthétiser un contrôleur en un point de vol donné. À cet effet, le modèle dynamique non linéaire de l'avion est linéarisé au voisinage du point d'équilibre associé à la condition de vol. Les contrôleurs sont alors synthétisés à partir des modèles linéarisés et ne pourront donc assurer le contrôle de l'avion qu'au voisinage des points de vol considérés. Dans le cas d'un système dont la dynamique est relativement uniforme à travers le domaine d'opération, une approche de type synthèse robuste est envisageable. Elle consiste à synthétiser un unique contrôleur assurant les performances robustes du système à travers le domaine d'opération. Dans le cas du contrôle d'un avion, l'enveloppe de vol à considérer est relativement vaste et a un fort impact sur la dynamique de l'appareil selon qu'il vole à basse ou haute vitesse et à basse ou haute altitude. Il est donc utopique de chercher un contrôleur d'ordre réduit permettant d'assurer les performances robustes du système en boucle fermée sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

L'approche classique consiste alors à procéder à un séquencement des gains, plus connue sous le terme anglais de *gain-scheduling*. Elle consiste en l'actualisation de la valeur des gains du contrôleur en temps réel en fonction de la condition de vol courante de l'avion (Rugh et Shamma (2000); Leith et Leithead (2000)). Pour cela, des contrôleurs sont synthétisés pour un nombre fini de points de fonctionnement couvrant l'enveloppe de vol. Les gains ainsi

obtenus sont interpolés en fonction des variables dites de séquençement qui, dans le cadre d'un avion, sont classiquement la vitesse, l'altitude et l'angle d'attaque. La procédure usuellement employée est la suivante :

1. Mise du système sous forme *Linear Parameter Varying* (LPV) (Sesane *et al.* (2013)).
2. Discrétisation de l'enveloppe de vol et synthèse d'un contrôleur rencontrant le cahier des charges en chacun des points de l'enveloppe de vol discrétisée.
3. Interpolation (multilinéaire, non linéaire ou autre) des gains des contrôleur en fonction des variables de séquençement. On obtient ainsi un contrôleur non linéaire basé sur une famille de contrôleurs linéaires.
4. Implémentation du contrôleur non linéaire.

Il est à noter que la phase d'interpolation représente généralement une phase délicate, ne fournissant généralement aucune garantie quant au bon fonctionnement du système entre deux points de design. Mentionnons que des travaux ont néanmoins été effectués afin d'offrir de telles garanties (Stiwell et Rugh (1999, 2000)).

Bien que largement employée dans l'industrie, l'approche classique du séquençement des gains souffre de certaines limitations. Cette approche est tout d'abord très coûteuse en temps car nécessitant généralement des itérations entre phase de synthèse et phase de validation. De plus, les gains obtenus sont généralement exprimés comme étant des fonctions continues par morceaux des variables de séquençement rendant la phase de validation fastidieuse. Finalement, les gains des contrôleurs synthétisés en différents points de vol sont stockés dans des *lookup tables* et interpolés en temps réel durant le vol. La présence d'irrégularités dans ces tables est courante, rendant la phase d'interpolation difficile au voisinage de ces points. Pour remédier à ces limitations, des techniques de séquençement ont été développées afin de fixer *a priori* la structure de séquençement des gains du contrôleur (Magni *et al.* (1998); Saussié *et al.* (2008, 2011)). Dans ce registre, les capacités de synthèse multimodèle des méthodes  $H_\infty$  structurées offrent un cadre tout adapté pour la synthèse de contrôleurs autoséquencés (Barbés *et al.* (2013)). Cette piste est amplement explorée au cours de ce mémoire.

### 2.1.3 Méthodes de validation dans le domaine de l'aéronautique

Finalement, nous abordons les méthodes de validation classiquement rencontrées dans le domaine de l'aéronautique. Dans le cadre industriel, ces méthodes de validation sont mises en œuvre par les avionneurs afin de prouver aux autorités de certification que le système des commandes de vol permet à l'avion de voler en toute sécurité. Pour ainsi recevoir l'aval des autorités de certification, l'avion doit satisfaire un ensemble de critères définis par des normes

(FAA (1974); JAA (1974)). Ces critères visent à évaluer la stabilité et les performances robustes du système de contrôle, ce dernier devant assurer un pilotage sécuritaire et aisé de l'appareil sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et pour toutes les valeurs possibles des paramètres incertains (coefficients aérodynamiques, paramètres de masse). Diverses méthodes de validation ont été développées au cours des précédentes décennies et mises en œuvre dans le domaine de l'aéronautique. Ces différentes méthodes ont fait l'objet d'un recensement complet par Varga et Fielding (2002); Varga *et al.* (2011) et sont brièvement reprises ci-dessous.

En premier lieu, des simulations temporelles du système en boucle fermée sont mises en œuvre afin d'en valider le bon comportement. De telles simulations sont envisagées dans un premier temps pour le système linéarisé puis, dans un second temps, sur le modèle non linéaire complet. Une procédure de type tirage de Monte-Carlo est mise en place de manière à couvrir l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain (Fernandes de Oliveira et Puyou (2011)). Bien qu'essentielle, ce type d'approche ne peut faire office de preuve du bon fonctionnement du système de commande sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Ne permettant en effet que de tester un nombre fini de configurations, une telle approche ne permet pas de garantir le bon fonctionnement du système entre deux configurations testées. Des outils mathématiques plus complexes et offrant des garanties sur le continuum de l'enveloppe de vol et du domaine incertain doivent être mis en œuvre.

La première étape consiste à venir vérifier la stabilité et les performances robustes du système à travers l'enveloppe de vol pour des conditions de vol et configurations incertaines stationnaires. L'étude de la stabilité et des performances robustes (modales, fréquentielles et marges de stabilité (Deodhare et Patel (1998); Bates *et al.* (2003))) du système *Linear Time-Invariant* (LTI) à travers l'emploi de techniques de  $\mu$ -analyse (Fan *et al.* (1991)) permet d'apporter la preuve du bon fonctionnement du système sur l'ensemble de l'enveloppe de vol pour des configurations stationnaires. Dans le même registre, certaines méthodes permettent d'étudier la stabilité du système à travers la recherche de fonctions de Lyapounov (Dasgupta *et al.* (1994); Dettori et Scherer (2000)).

La seconde étape, plus réaliste, consiste à venir étudier la stabilité du système en tenant compte de l'impact des potentielles variations de la condition de vol et des paramètres incertains. Pour cela, des méthodes de type *Integral Quadratic Constraint* (IQC) sont considérées afin d'étudier la stabilité et les performances du système LPV (Megretski et Rantzer (1997)). Ces dernières peuvent également être mises en œuvre dans le cadre de l'évaluation de critères de confort (Varga *et al.* (2011); Scherer et Köse (2006)).

Parmi les autres méthodes existantes, mentionnons les méthodes probabilistes permettant de rechercher les plus mauvaises conditions de vol et combinaisons des paramètres incertains pour lesquels les critères de performances sont les plus faibles (Fielding *et al.* (2002)). Certaines méthodes visent également à inclure dans la validation le comportement du pilote, en déterminant pour une configuration donnée le *worst-case pilot input* (Forssell (2003); Menon *et al.* (2006)).

## 2.2 Objectifs et contributions

À la lumière de la revue de littérature, nous avons dégagé dans le cadre de ce projet un objectif majeur que l'on peut résumer de la façon suivante :

***Développer une méthode visant à synthétiser un système de commandes de vol autoséquenté et robuste aux variations des paramètres de masse et de centrage pour une architecture de contrôle fixe.***

Cet objectif nous a permis de dégager principalement trois axes qui ont été détaillés au cours de la revue de littérature et qui ont été repris sous la forme de 3 objectifs.

### 2.2.1 Objectif 1 : modélisation et analyse de l'impact des variations de centrage sur la dynamique de l'avion

Préalablement à toute synthèse de contrôleur, un modèle de la dynamique de l'avion tenant compte explicitement de la masse et du centrage de l'appareil doit être mis en place. De plus, il ne s'agit pas d'effectuer la synthèse d'un système de commandes de vol au complet. L'étude de la dynamique du modèle doit nous permettre d'identifier le mode de l'avion le plus impacté par les paramètres de masse et ainsi recentrer le problème sur le contrôle de la dynamique associée à ce mode.

**Contribution** Comme mentionné précédemment, la revue de littérature n'a pas permis d'aboutir à l'obtention d'un modèle rendant compte de manière satisfaisante de l'impact du centrage sur la dynamique de l'avion. Les modèles prennent généralement comme point de référence à contrôler le centre de gravité  $G$  de l'avion. Dans le cadre de potentielles variations du centrage, cela conduit à considérer le contrôle d'un point qui n'est pas statiquement lié à l'avion. Afin de palier ce manque, un modèle complet décrivant la dynamique de l'avion en prenant comme point de référence un point  $O$  statiquement lié à l'appareil a été mis en

place. Partant des équations vectorielles proposées par Zhang *et al.* (2009), un modèle non linéaire complet ainsi que son linéarisé tangent ont été établis.

Le modèle ainsi obtenu a permis, à travers l'étude du lieu des racines, d'identifier la dynamique longitudinale de l'avion, et en particulier le mode *Short Period*, comme étant le plus sensible quant aux variations des paramètres de masse. La phase de synthèse de contrôleurs s'est dès lors focalisée sur le contrôle du mode *Short Period*. En se basant sur les besoins de l'industrie aéronautique, un cahier des charges complet a été élaboré et une architecture de contrôle, dérivée d'architectures de contrôle classiques du mode *Short Period*, a été choisie.

### 2.2.2 Objectif 2 : mise en place et application d'une méthode de synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquenté à architecture fixe

De par l'expérience acquise au cours des dernières décennies, les avionneurs ont développé des architectures de contrôle qu'ils souhaitent conserver lors de la conception des commandes de vol de nouveaux avions. Ils se sont en effet forgés une grande expertise de ces architectures dont ils maîtrisent les moindres rouages, facilitant ainsi la phase d'ajustement. Partant d'une architecture fixe, on cherche alors à élaborer une méthode permettant d'effectuer la synthèse de contrôleurs robustes et autoséquentés.

**Contribution** Le point de départ du travail effectué dans le cadre de ce projet se base sur les idées développées par Barbés *et al.* (2013), mettant à profit la capacité de synthèse multimodèle des méthodes  $H_\infty$  structurées. En dépit d'une plus grande complexité, cette capacité offre la possibilité d'effectuer la synthèse de contrôleurs autoséquentés. En effet, en spécifiant *a priori* la structure de séquençement des gains du contrôleur en fonction des variables de séquençement (polynomiale ou rationnelle), il est possible d'appliquer la synthèse multimodèle en considérant simultanément un ensemble de points de fonctionnement recouvrant l'enveloppe de vol. De cette façon, la phase de séquençement des gains est transposée en une contrainte de design à travers des contraintes  $H_\infty$ . Une telle approche présente plusieurs avantages. Un séquençement *a posteriori* des gains n'est pas nécessaire, évitant l'alternance entre phase de synthèse et phase de validation. De plus, les gains sont directement obtenus comme étant des fonctions lisses des variables de séquençement.

La méthode mise en place nécessite deux phases de synthèse. Après discrétisation de l'enveloppe de vol et du domaine incertain, une première étape préliminaire consiste à procéder à un classique séquençement *a posteriori* des gains. Cette première étape est nécessaire

pour ajuster les contraintes  $H_\infty$  utilisées dans le synthèse et pour définir *a priori* une bonne dépendance des gains vis-à-vis des variables de séquençement. De plus, cette première synthèse permet d’obtenir une condition initiale adéquate pour lancer la synthèse du contrôleur robuste et autoséquéncé. En effet, le problème étant non convexe, une bonne initialisation de la méthode est prépondérante. Une fois définie, l’architecture de séquençement des gains est injectée dans l’architecture du contrôleur, permettant ainsi de transposer le problème d’autoséquéncement en un problème de synthèse  $H_\infty$  structurée. Finalement une méthode numérique de synthèse  $H_\infty$  structurée est mise en œuvre afin d’obtenir un contrôleur robuste et autoséquéncé. Cette méthode a été mise en place avec succès dans le cadre du contrôle du mode *Short Period* du *Fighting Falcon F-16*.

Une analyse approfondie des résultats nous a conduit à la reformulation du problème d’autoséquéncement tel que présenté au paragraphe précédent en un problème d’optimisation multiobjectif, faisant intervenir la notion de solutions faiblement optimales au sens de Pareto. Le calcul de solutions faiblement Pareto optimales alternatives a alors été envisagé via l’introduction de coefficients de pondération visant à rendre l’effort de minimisation plus homogène à travers l’enveloppe de vol. Il a alors été montré comment une telle approche permet d’améliorer significativement les performances du système de commande à travers l’enveloppe de vol.

### 2.2.3 Objectif 3 : validation du système de commande obtenu lors de la phase de synthèse

La méthode, bien que synthétisant des contrôleurs tenant compte simultanément des aspects de robustesse et de séquençement des gains, ne permet pas d’assurer *a priori* la stabilité et les performances robustes du système à travers l’enveloppe de vol. De plus, l’implémentation d’un contrôleur séquéncé n’est pas sans problème. Cela conduit à l’apparition de termes de couplage cachés (*hidden coupling terms*) lors de l’implantation sur le système non linéaire et dont l’impact n’a pas été pris en compte dans la phase de synthèse (Lawrence et Rugh (1995)). Une phase de validation *a posteriori* du système de commande est donc indispensable.

**Contribution** L’objectif est ici de démontrer que la méthode de synthèse de contrôleurs robustes et autoséquéncés permet, sur l’exemple étudié, de mener à la synthèse d’un système de commande assurant la stabilité et les performances robustes du système à travers l’enveloppe de vol. Pour cela, trois axes ont été explorés. Le premier axe vise à prouver la stabilité et les performances du système de commande en dépit des incertitudes portant sur

les coefficients aérodynamiques et paramètres de masse à travers l'enveloppe de vol pour des configurations stationnaires. Pour cela, des techniques de  $\mu$ -analyse ont été mises en place. Le deuxième axe vise à assurer la stabilité du système pour des configurations variant dans le temps. Cette validation, plus proche de la réalité physique du problème, a pour but de mesurer l'impact des variations des conditions de vol et des paramètres incertains sur la stabilité et les performances du système au cours du vol. Pour cela, des méthodes de type IQC ont été considérées. Finalement, le troisième axe consiste en une série de simulations sur le modèle non linéaire complet de l'avion. Plusieurs configurations ont été testées pour des conditions de vol stationnaires ou variant dans le temps et pour des paramètres de masse et de centrage stationnaires, lentement variants ou rapidement variants.

## CHAPITRE 3

### MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE DE L'AVION

Ce premier chapitre est consacré à l'élaboration d'un modèle mathématique de la dynamique de l'avion représentant fidèlement son comportement au cours du vol. De nombreux modèles ont été développés dans la littérature (McRuer *et al.* (1973)), (Etkin et Reid (1995)), (Nelson (1997)) et (Stevens et Lewis (2003)) et sont largement utilisés à des fins d'analyse et de synthèse de systèmes de commandes de vol. La grande majorité de ces modélisations repose sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la Terre est plate et immobile, avec un vecteur gravité constant ;
- l'avion est un solide indéformable ;
- la masse de l'avion et sa répartition sont constantes ;
- l'avion est symétrique par rapport au plan  $x$ - $z$  (symétrie géométrique, massique et propulsive).

Ces hypothèses permettent d'obtenir des modèles simplifiés des équations de la mécanique du vol. L'hypothèse du corps rigide permet de traiter le problème comme étant un problème de la mécanique des solides indéformables, ce qui conduit à négliger les modes flexibles de l'avion. L'hypothèse de la Terre plate et immobile traduit le fait que l'on néglige les effets induits par la rotation de la Terre et par son rayon de courbure. Les hypothèses concernant la masse ainsi que sa répartition conduisent à négliger la consommation de kérosène et les transferts effectués entre les différentes cuves au cours du vol.

Afin d'étudier l'impact de la masse et du centrage sur la dynamique de l'avion et par la suite élaborer des contrôleurs robustes vis-à-vis de leur variation, il convient d'élaborer un modèle de la dynamique de l'avion tenant explicitement compte de ces paramètres. L'objectif de cette partie est donc d'établir un tel modèle sous la forme d'une représentation d'état paramétrisée par la masse et la position du centre de gravité.

On introduit dans un premier temps la modélisation de l'atmosphère à la Section 3.1. Après avoir introduit diverses notations, les équations de la dynamique de l'avion avec un offset sur la position du centre de gravité sont présentées dans la Section 3.2. Finalement, la Section 3.3 est consacrée à la linéarisation de la dynamique de l'avion pour le vol en croisière et conduit à l'obtention des matrices de la représentation d'état du système.



### 3.1 Modélisation de l'atmosphère

Cette première section met en place la modélisation de l'environnement au sein duquel évolue l'avion. La modélisation de l'atmosphère revêt une importance particulière dans l'établissement des équations de la dynamique de l'avion dans la mesure où les forces aérodynamiques s'expriment de manière générale sous la forme :

$$A = \frac{1}{2} \rho v_{G/\text{air}}^2 S C_a,$$

où  $A$  est une des composantes des forces aérodynamiques,  $\rho$  la densité de l'air,  $v_{G/\text{air}}$  la vitesse du centre de gravité de l'avion par rapport à la masse d'air,  $S$  la surface des ailes de l'avion et  $C_a$  le coefficient aérodynamique associé à la force  $A$ . Les forces aérodynamiques sont ainsi proportionnelles à la densité de l'air qui est une fonction de l'altitude et de la température. Cette dépendance est classiquement modélisée dans les limites de la troposphère<sup>1</sup> comme suit :

$$T = T_0 - \lambda h, \quad \rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\lambda h}{T_0} \right)^{\frac{g M_{\text{air}}}{R \lambda} - 1}, \quad (3.1)$$

où les différents symboles représentent respectivement :

- $T$  la température de l'air à l'altitude considérée (K) ;
- $\rho$  la masse volumique de l'air à l'altitude considérée (kg/m<sup>3</sup>) ;
- $h$  l'altitude considérée (m) ;
- $T_0$  la température au niveau de la mer (K) ;
- $\rho_0$  la masse volumique de l'air au niveau de la mer (kg/m<sup>3</sup>) ;
- $\lambda$  le gradient de température dont la valeur est de  $6.5 \times 10^{-3}$  K/m dans la troposphère ;
- $g$  l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre 9.806 m/s<sup>2</sup> ;
- $M_{\text{air}}$  la masse molaire de l'air sec  $2.896 \times 10^{-2}$  kg/mol ;
- $R$  la constante des gaz parfaits 8.314 J/mol/K.

La densité de l'air est reliée à la pression atmosphérique et à la température par la relation des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{P_{\text{atm}} M_{\text{air}}}{R T}.$$

En fixant la pression atmosphérique au niveau du sol à la valeur usuelle de 101325 Pa, on obtient la valeur de la densité de l'air au niveau du sol en fonction de la température. Pour la suite, on supposera une température au niveau du sol de  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ , ce qui conduit à une masse volumique  $\rho_0 = 1.225$  kg/m<sup>3</sup>.

---

1. Altitude inférieure à 15000 m.

On définit également le nombre de Mach comme étant le ratio de la vitesse de l'avion par la vitesse du son :

$$M = \frac{V_T}{a}. \quad (3.2)$$

La vitesse du son dans l'air dépend de la température de l'atmosphère à l'altitude considérée, et donc de l'altitude de vol, suivant la relation :

$$a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{air}}}, \quad (3.3)$$

où  $\gamma = 1.4$  est le coefficient adiabatique de l'air.

### 3.2 Modèle dynamique de l'avion

Dans l'ensemble du document, on note  $G$  le centre de gravité de l'avion. Sous l'hypothèse usuelle que la répartition de masse est constante,  $G$  est le point pris en référence pour l'écriture des équations de la dynamique de l'avion. L'objectif étant d'étudier l'impact du centrage sur la dynamique de l'avion, le point  $G$  est donc considéré incertain et lentement mobile dans le temps. Il convient donc de choisir un nouveau point de référence  $O$  lié statiquement à l'avion. De manière à simplifier les calculs, on prendra  $O$  comme étant la position de référence du centre de gravité de l'avion pour la donnée des coefficients aérodynamiques. Il est à noter que le point  $O$  ainsi défini appartient au plan de symétrie de l'avion.

#### 3.2.1 Repères de référence et définition des angles

Afin de mettre en place les équations de la dynamique de l'avion, on introduit 5 repères particuliers :

- **Repère *Earth Centered Inertial* (ECI)**

Repère noté  $\mathcal{R}_I$  dont l'origine est liée au centre de la Terre et dont les axes pointent vers des directions fixes de l'espace. Ce repère est supposé inertiel pour un temps caractéristique de quelques heures. Ses axes sont définis par :

- axe  $\mathbf{z}_I$  : orienté suivant l'axe de rotation de la Terre dans la direction Sud – Nord ;
- axes  $\mathbf{x}_I$  et  $\mathbf{y}_I$  : choisis dans le plan équatorial de manière à obtenir un repère ortho-normé direct.

- **Repère *North East Down* (NED)**

Repère noté  $\mathcal{R}_e$  lié statiquement à l'avion et dont l'orientation des axes est fonction de

la position de l'appareil sur le globe terrestre. Son origine est le point  $O$  et ses axes sont définis par :

- axe  $\mathbf{x}_e$  : orienté vers le Nord (géographique) ;
- axe  $\mathbf{y}_e$  : orienté vers l'Est ;
- axe  $\mathbf{z}_e$  : orienté vers le centre de la Terre.

### • Repère avion

Repère noté  $\mathcal{R}_b$  lié statiquement à l'avion dont l'origine est le point  $O$  et dont les axes sont définis par :

- axe  $\mathbf{x}_b$  : placé dans la direction longitudinale de l'avion et orienté vers l'avant ;
- axe  $\mathbf{y}_b$  : suivant la direction des ailes, i.e. perpendiculaire au plan de symétrie de l'avion et orienté vers la droite au « sens pilote » ;
- axe  $\mathbf{z}_b$  : placé dans le plan de symétrie de l'avion et orienté vers son « ventre ».

Le passage du repère NED au repère avion est caractérisé par 3 rotations successives (Fig. 3.1) :

1. Rotation d'axe  $\mathbf{z}_e$  et d'angle de cap  $\Psi$  ;
2. Rotation d'axe  $\mathbf{y}_{\text{int}}$  et d'angle d'assiette  $\Theta$  ;
3. Rotation d'axe  $\mathbf{x}_b$  et d'angle de gîte  $\Phi$ .

Ce qui conduit à l'obtention de la matrice de passage suivante :

$$R_{\mathcal{R}_b/\mathcal{R}_e} = \begin{bmatrix} c_\Theta c_\Psi & c_\Theta s_\Psi & -s_\Theta \\ -c_\Phi s_\Psi + s_\Phi s_\Theta c_\Psi & c_\Phi c_\Psi + s_\Phi s_\Theta s_\Psi & s_\Phi c_\Theta \\ s_\Phi s_\Psi + c_\Phi s_\Theta c_\Psi & -s_\Phi c_\Psi + c_\Theta s_\Theta s_\Psi & c_\Psi c_\Theta \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

où pour un angle  $\varphi$  quelconque,  $c_\varphi = \cos(\varphi)$  et  $s_\varphi = \sin(\varphi)$ .

### • Repère stabilité

Pour une condition de vol stationnaire donnée, notons  $\mathbf{v}_{O_e/\text{air}}$  la vitesse aérodynamique du point  $O$  en régime permanent. On introduit le repère de stabilité noté  $\mathcal{R}_s$  dont l'origine est le point  $O$  et dont les axes  $\mathbf{x}_s$ ,  $\mathbf{y}_s = \mathbf{y}_b$  et  $\mathbf{z}_s$  sont définis à la Figure 3.2. Le passage du repère avion au repère stabilité est défini par l'angle d'attaque à l'équilibre  $\alpha_e$ , ce qui mène la matrice de passage suivante :

$$R_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_b} = R_y(-\alpha_e) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_e) & 0 & \sin(\alpha_e) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_e) & 0 & \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

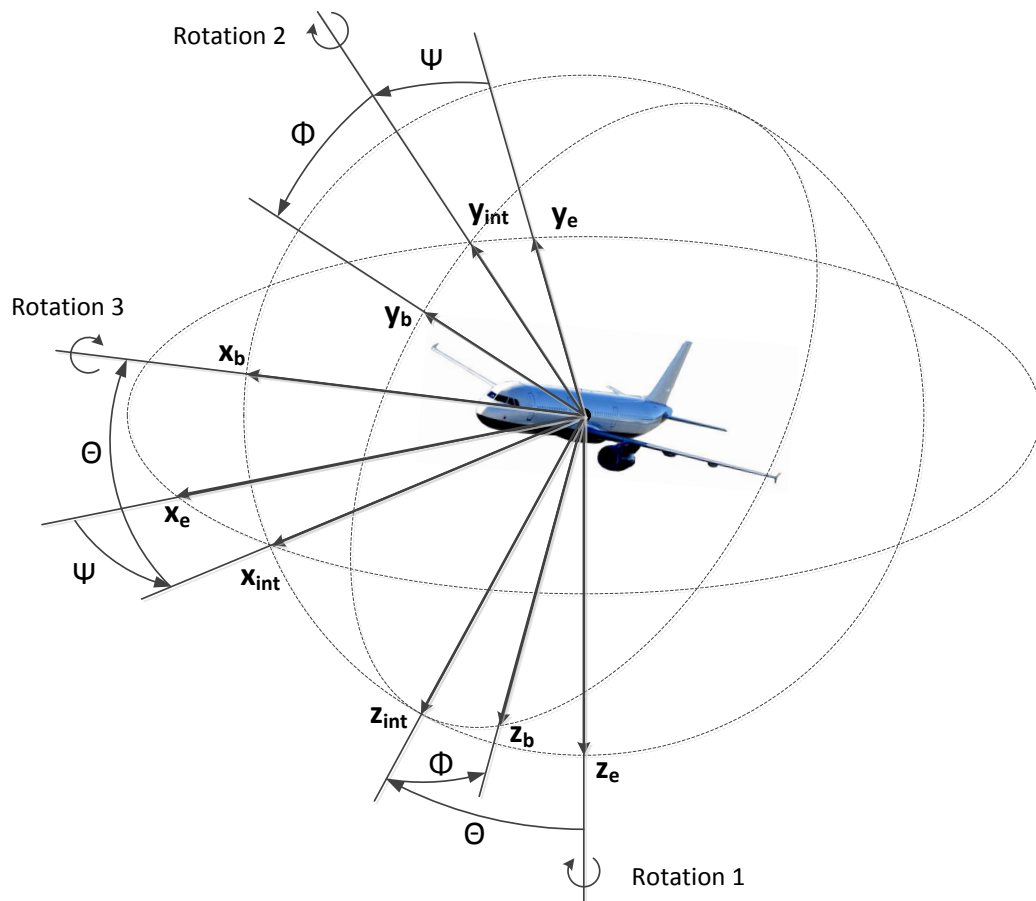


Figure 3.1 Définition des angles d'Euler

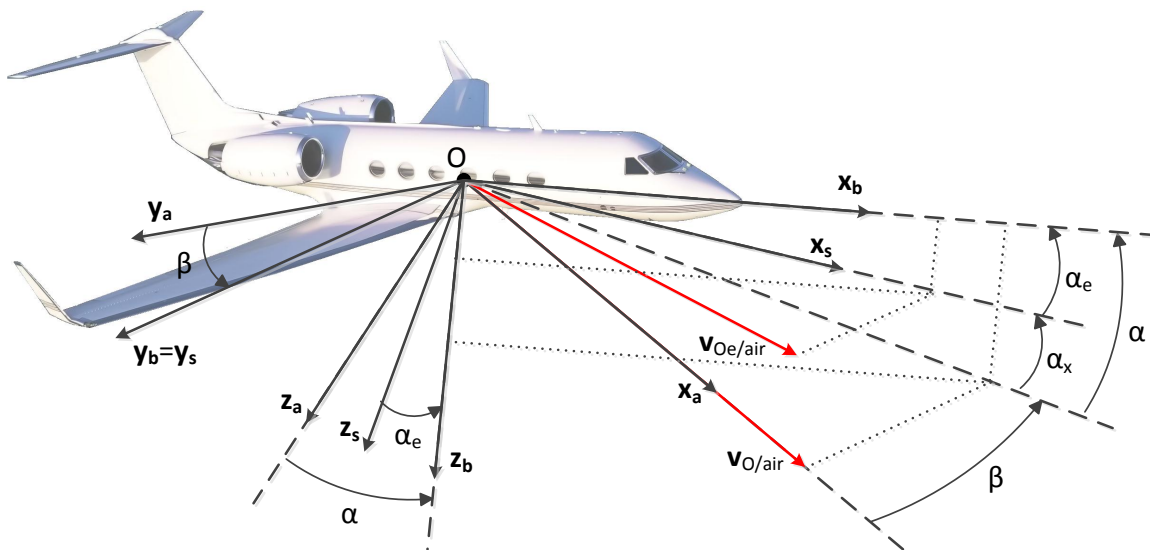


Figure 3.2 Repères stabilité et aérodynamique

- **Repère aérodynamique**

Repère noté  $\mathcal{R}_a$  et dont l'origine est le point  $O$ . En notant  $\mathbf{v}_{O/air}$  la vitesse aérodynamique courante du point  $O$ , les axes  $\mathbf{x}_a$ ,  $\mathbf{y}_a$  et  $\mathbf{z}_a$  du repère aérodynamique sont définis à la Figure 3.2. Le passage du repère avion au repère aérodynamique est défini via la donnée de l'angle d'attaque  $\alpha$  et l'angle de dérapage  $\beta$ . On introduit à partir de ces définitions l'angle d'attaque relativement au repère stabilité  $\alpha_x = \alpha - \alpha_e$ . Le passage du repère avion au repère stabilité est caractérisé par la matrice de passage suivante :

$$R_{\mathcal{R}_a/\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & \sin(\beta) & \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\beta) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

En introduisant  $\mathbf{v}_{O/air}^{\mathcal{R}_b} = [U \ V \ W]^\top$  la vitesse du point  $O$  par rapport à la masse d'air dans le repère avion et  $\mathbf{v}_{O/air}^{\mathcal{R}_a} = [V_T \ 0 \ 0]^\top$  dans le repère aérodynamique, on a via la relation  $\mathbf{v}_{O/air}^{\mathcal{R}_b} = R_{\mathcal{R}_b/\mathcal{R}_a} \mathbf{v}_{O/air}^{\mathcal{R}_a}$  que :

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = V_T \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

On en déduit que les angles d'attaque et de dérapage sont donnés par :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W}{U}\right), \quad \beta = \arcsin\left(\frac{V}{V_T}\right). \quad (3.8)$$

On définit de plus la pente  $\gamma$  de l'avion (*flight path angle*) comme étant l'angle formé par le vecteur vitesse de l'avion  $\mathbf{v}_{O/air}$  et le plan  $\mathbf{x}_e$ - $\mathbf{y}_e$ , pris positif dans le sens  $\mathbf{z}_e$  décroissant. Cet angle permet de relier la vitesse aérodynamique de l'avion  $V_T$  à sa vitesse de montée via la relation :

$$v_{montee} = V_T \sin(\gamma). \quad (3.9)$$

En notant :

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ -v_{montee} \end{bmatrix} = R_{\mathcal{R}_e/\mathcal{R}_b} R_{\mathcal{R}_b/\mathcal{R}_a} \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

on obtient après calculs que  $\gamma$  vérifie la relation :

$$\sin(\gamma) = [\cos(\alpha) \cos(\beta)] \sin(\Theta) - [\sin(\Phi) \sin(\beta) + \cos(\Phi) \sin(\alpha) \cos(\beta)] \cos(\Theta). \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Équations vectorielles de la dynamique de l'avion

La position du centre de gravité  $G$  étant supposée incertaine et lentement mobile, les équations seront développées relativement au point de référence  $O$ . L'application des lois de Newton donne les équations vectorielles (3.11) et (3.12) pour des grandeurs exprimées dans le repère avion (Zhang *et al.* (2009)).

Le théorème de la résultante dynamique mène ainsi à :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & m \left. \frac{d\mathbf{v}_{O/air}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_b} + m \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_b} \times \boldsymbol{\Delta r} + m \boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} \times (\mathbf{v}_{O/air} + \boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} \times \boldsymbol{\Delta r}) \\ & + m \left. \frac{d\mathbf{v}_{air/\mathcal{R}_I}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_I}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où les différentes grandeurs, comme détaillé en Annexe A.1, sont exprimées dans le repère avion  $\mathcal{R}_b$  par :

- $\mathbf{F}$  est la résultante des efforts extérieurs s'exerçant sur l'avion, correspondant à la somme des forces aérodynamiques, de poussée et de gravité ;
- $\mathbf{v}_{O/air} = [U \ V \ W]^\top$  est la vitesse du point O par rapport à la masse d'air ;
- $\mathbf{v}_{air/\mathcal{R}_I}$  est la vitesse de la masse d'air par rapport au repère ECI ;
- $\boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} = [P \ Q \ R]^\top$  est le vecteur vitesse de rotation de l'avion ;
- $\boldsymbol{\Delta r} = \mathbf{OG} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^\top$  est la position du centre de gravité de l'avion ;
- $m$  est la masse de l'avion.

Remarque : l'équation des efforts fait apparaître le terme :

$$\mathbf{F}_{vent} = m \left. \frac{d\mathbf{v}_{air/\mathcal{R}_I}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_I}.$$

Ce terme traduit l'influence du vent sur le déplacement de l'avion. Faute de mieux, l'action du vent est considérée comme une perturbation agissant sur le système. De manière à simplifier l'écriture des équations, on négligera ce terme par la suite.

Le théorème du moment cinétique pour des moments exprimés en  $G$  donne quant à lui :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(G) = & \mathbf{I} \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_b} + \boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} + m \boldsymbol{\Delta r} \times \left( \boldsymbol{\Delta r} \times \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_b} \right) \\ & + m (\boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} \cdot \boldsymbol{\Delta r}) (\boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_I} \times \boldsymbol{\Delta r}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $\mathbf{M}(G)$  est la résultante des moments extérieurs s'appliquant sur l'avion au point  $G$  et  $\mathbf{I}$  la matrice d'inertie de l'appareil dans le repère avion donnée par :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

où  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_z$  sont les moments d'inertie suivant les axes  $\mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{y}_b$  et  $\mathbf{z}_b$  et  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$  sont les produits d'inertie. Du fait des hypothèses de symétrie, on a généralement  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ .

Les équations dynamiques de l'avion sont complétées par les équations cinématiques (3.14) qui décrivent l'évolution de l'orientation du repère avion relativement au repère NED (Stevens et Lewis (2003)).

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = P + Q \sin(\Phi) \tan(\Theta) + R \cos(\Phi) \tan(\Theta) \\ \dot{\Theta} = Q \cos(\Phi) - R \sin(\Phi) \\ \dot{\Psi} = (Q \sin(\Phi) + R \cos(\Phi)) \sec(\Theta) \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $P$  est la vitesse de roulis,  $Q$  la vitesse de tangage et  $R$  la vitesse de lacet.

### 3.2.3 Forces et moments extérieurs

De manière à développer les équations vectorielles obtenues précédemment, on explicite dans cette sous-section les efforts et moments extérieurs s'exerçant sur l'avion.

#### 3.2.3.1 Efforts aérodynamiques

Les forces aérodynamiques sont exprimées dans les repères  $\mathcal{R}_a$  et  $\mathcal{R}_b$  par :

$$\mathbf{F}_a^{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_a^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

où  $L$  représente la force de portance,  $D$  la force de traînée et  $C$  l'effort latéral que subit l'avion. On passe de l'une à l'autre par la matrice de passage  $R_{\mathcal{R}_a/\mathcal{R}_b}$ . Ces composantes prennent classiquement la forme suivante :

$$D = \bar{q} S C_D, \quad C = \bar{q} S C_C, \quad L = \bar{q} S C_L,$$

avec  $\bar{q} = \frac{1}{2} \rho v_{G/\text{air}}^2$  la pression dynamique de l'air,  $C_D$  le coefficient aérodynamique de traînée,  $C_L$  le coefficient aérodynamique de portance et  $C_C$  le coefficient aérodynamique de force

latérale. On introduit de la même façon les coefficients aérodynamiques  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$ .

Les moments aérodynamiques sont notés de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_a^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Comme pour les forces aérodynamiques, on introduit les coefficients aérodynamiques des moments. Ils traduisent la capacité de l'avion dans une configuration donnée à produire des moments en roulis, tangage et lacet.

$$L_a = \bar{q} S b C_l, \quad M_a = \bar{q} S \bar{c} C_m, \quad N_a = \bar{q} S b C_n,$$

où  $b$  représente l'envergure de l'avion,  $\bar{c}$  la corde aérodynamique moyenne et  $C_l$ ,  $C_m$  et  $C_n$  les coefficients aérodynamique des moments dans le repère avion.

Les coefficients aérodynamiques  $C_D$ ,  $C_C$ ,  $C_L$ ,  $C_l$ ,  $C_m$  et  $C_n$  sont des fonctions hautement non linéaires du Mach, de l'altitude et des angles de braquage des gouvernes. En effet, l'avion est équipé de gouvernes qui permettent d'influencer les forces et moments aérodynamiques. On retrouve essentiellement trois types de gouvernes :

- la gouverne de profondeur (ou *elevator*) : gouverne horizontale positionnée sur la queue de l'avion permettant de créer un mouvement de tangage et qui est caractérisée par l'angle de braquage  $\delta_e$  ;
- la gouverne de direction (ou *rudder*) : gouverne verticale positionnée sur la queue de l'avion permettant de créer un mouvement de lacet et qui est caractérisée par l'angle de braquage  $\delta_r$  ;
- l'aileron : gouverne positionnée sur les ailes de l'avion permettant de créer un mouvement de roulis et qui est caractérisé par l'angle de braquage  $\delta_a$ .

À ceux-là s'ajoutent éventuellement d'autres gouvernes comme les plans canards, les profils hypersustentateurs, les becs et le plan horizontal réglable.

Remarque : les moments aérodynamiques sont généralement mesurés relativement à la position de référence du centre de gravité de l'avion, c'est-à-dire le point  $O$  que l'on a choisi en introduction pour être le point de référence de la modélisation. Lorsque le centre de gravité  $G$  présente un offset par rapport à la position de référence, la relation de Varignon appliquée aux efforts aérodynamiques  $\mathbf{M}_a(O) = \mathbf{M}_a(G) + \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F}_a$  permet d'aboutir aux relations :



$$\begin{cases} L_a(G) = L_a(O) + \Delta z Y_a - \Delta y Z_a \\ M_a(G) = M_a(O) + \Delta x Z_a - \Delta z X_a \\ N_a(G) = N_a(O) + \Delta y X_a - \Delta x Y_a \end{cases} \quad (3.17)$$

Ces relations permettent donc de transférer les valeurs données dans les tables pour la position de référence  $O$  du centre de gravité aux configurations pour lesquelles un offset est présent.

### 3.2.3.2 Force de gravité

Le champ de pesanteur étant uniforme sur toutes les parties de l'avion, on a :

$$\mathbf{P}^{\mathcal{R}_b} = mg\mathbf{z}_e = mg \begin{bmatrix} -\sin(\Theta) \\ \sin(\Phi)\cos(\Theta) \\ \cos(\Phi)\cos(\Theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_g(G) = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

### 3.2.3.3 Force de poussée

On suppose que la résultante de la poussée est appliquée et contenue dans le plan  $\mathbf{x}_b$ - $\mathbf{z}_b$ . On note  $\alpha_T$  l'angle entre l'axe  $\mathbf{x}_b$  du repère avion et la poussée  $\mathbf{F}_T$ , cet angle étant pris positif dans le sens  $\mathbf{z}_b$  décroissant. On obtient que :

$$\mathbf{F}_T^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = F_T \begin{bmatrix} \cos(\alpha_T) \\ 0 \\ -\sin(\alpha_T) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Les moments engendrés par la force de poussée sont symbolisés par :

$$\mathbf{M}_T^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

En introduisant  $T$  le point d'application de la résultante de la poussée (3.21), les moments induits par la poussée exprimés dans le repère avion sont donnés par l'équation (3.22).

$$\mathbf{OT} = x_T\mathbf{x}_b + z_T\mathbf{z}_b. \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} L_T(G) = \Delta y \sin(\alpha_T) F_T \\ M_T(G) = (z_T - \Delta z) \cos(\alpha_T) F_T + (x_T - \Delta x) \sin(\alpha_T) F_T \\ N_T(G) = \Delta y \cos(\alpha_T) F_T \end{cases} \quad (3.22)$$

La poussée des moteurs est contrôlée via la position de la manette des gaz  $\delta_t$ .

### 3.2.4 Modèle non linéaire de la dynamique longitudinale

Les développements précédents conduisent au modèle non linéaire complet présenté en Annexe A.2. Afin de développer les équations non linéaires associées à la dynamique longitudinale de l'avion, on effectue les hypothèses suivantes :

1. le plan  $\mathbf{x}_b$ - $\mathbf{z}_b$  est un plan de symétrie quant à la répartition de masse de l'avion :

$$\Delta y = 0, \quad I_{xy} = I_{yz} = 0 ;$$

2. le déplacement du centre de gravité suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$  est nul :

$$\Delta z = 0 ;$$

3. vol en ligne droite, avec les ailes horizontales et sans dérapage :

$$\Psi = \Phi = 0, \quad P = R = 0, \quad \beta = 0.$$

En effectuant l'hypothèse dite de la Terre plate qui permet de remplacer le repère inertiel de référence  $\mathcal{R}_I$  par le repère NED, la projection des équations (3.11) et (3.12) permet d'obtenir le système d'équations scalaires régissant la dynamique longitudinale de l'avion (3.23). Ces équations sont valables pourvu que  $\Delta x \neq \Delta x_c = \sqrt{I_y/m}$ . Des applications numériques pour plusieurs modèles d'avions sont données en Annexe A.4, montrant que les valeurs prises par  $\Delta x_c$  ne sont pas atteignables pour des valeurs de déplacement réalistes du centre de gravité de l'avion.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\dot{V}_T = -D + \cos(\alpha + \alpha_T)F_T + \frac{m\Delta x \sin(\alpha)}{I_y - m\Delta x^2} (M_a + M_T) - m \sin(\Theta - \alpha)g \\ \quad + m \cos(\alpha)\Delta x Q^2 \\ mV_T\dot{\alpha} = -L - \sin(\alpha + \alpha_T)F_T + \frac{m\Delta x \cos(\alpha)}{I_y - m\Delta x^2} (M_a + M_T) + m \cos(\Theta - \alpha)g \\ \quad + mV_T Q - m \sin(\alpha)\Delta x Q^2 \\ \dot{Q} = \frac{1}{I_y - m\Delta x^2} (M_a + M_T) \\ \dot{\Theta} = Q \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Remarque : si l'offset sur la position longitudinale du centre de gravité est nul, i.e.  $\Delta x = 0$ , on retrouve les équations classiques de la dynamique longitudinale (Stevens et Lewis (2003)). L'introduction d'un offset sur la position longitudinale du centre de gravité de l'avion est alors caractérisée par :

- un couplage entre l'évolution de la vitesse  $V_T$  et le moment résultant des forces aérodynamiques et de poussée relativement à l'axe  $\mathbf{x}_b$  ;
- un couplage entre l'évolution de l'angle d'attaque  $\alpha$  et le moment résultant des forces aérodynamiques et de poussée relativement à l'axe  $\mathbf{x}_b$  ;
- l'ajout dans la dynamique d'évolution de la vitesse  $V_T$  et de l'angle d'attaque  $\alpha$  d'un terme proportionnel au carré de la vitesse de rotation en tangage ;
- une modulation du coefficient liant le terme d'accélération angulaire en tangage au moment résultant des forces aérodynamiques et de poussée relativement à l'axe  $\mathbf{x}_b$ .

### 3.3 Modèle dynamique linéaire du vol en croisière

À des fins d'analyse et de synthèse de contrôleurs, on cherche à mettre en place le modèle linéarisé de la dynamique de l'avion pour le vol de type croisière. Dans le cas général (montée, descente), une condition de vol est donnée par la vitesse de l'avion  $V_T$ , l'altitude de vol  $h$  et la pente  $\gamma$ . En se plaçant dans le cadre du vol en croisière, la pente de l'avion à l'équilibre est nulle. Une condition de vol se résume donc à la donnée du couple  $(V_T, h)$ . Pour un point de vol donné, on va tout d'abord chercher les conditions à imposer sur les variables  $\alpha, \delta_e, \delta_t, \Theta, \dots$  afin d'obtenir un point d'équilibre respectant la condition de vol. La dynamique de l'avion sera alors linéarisée autour de ce point d'équilibre.

Pour des raisons de simplicité, le modèle linéarisé va être développé non pas dans le repère avion  $\mathcal{R}_b$  mais dans le repère stabilité  $\mathcal{R}_s$ . Le passage vers le repère  $\mathcal{R}_s$  des équations dynamiques données en Annexe A.2 se fait par la matrice de passage  $R_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_b}$  ; les équations ainsi obtenues sont données en Annexe A.3 pour des grandeurs prises dans le repère stabilité, grandeurs introduites plus en détails à l'Annexe A.1. De manière à alléger les notations, on omettra les indices « s » signifiant que les grandeurs sont prises dans le repère stabilité pour les termes exprimant la vitesse du point  $O$ , les efforts, les moments et la position du centre de gravité. Il faut donc garder à l'esprit que les variables utilisées dans le modèle non linéaire diffèrent d'une rotation par rapport à celles utilisées dans le modèle linéarisé. On conservera néanmoins les indices « s » concernant les composantes du vecteur vitesse de rotation instantanée de l'avion afin d'éviter toute confusion comme on le verra par la suite.

### 3.3.1 Le vol de type croisière

On établit ci-dessous les hypothèses et les notations concernant les points d'équilibre et l'étude aux petites variations dans le cadre du vol en croisière. L'hypothèse du vol en croisière consiste à formuler les trois hypothèses suivantes sur les variables à l'équilibre : absence de déplacement latéral de l'avion, pas de rotation en roulis et en lacet et vol avec les ailes horizontales :

$$V_e = 0, \quad P_{s,e} = R_{s,e} = 0, \quad \Phi_e = 0.$$

L'hypothèse de la Terre plate conduit à supposer une vitesse de rotation en tangage nulle à l'équilibre :

$$Q_{s,e} = 0.$$

Finalement, le déplacement vertical de l'avion est nul dans le repère stabilité  $\mathcal{R}_s$  (3.24). Cette simplification provient du choix du repère stabilité comme repère de projection.

$$W_e = 0. \quad (3.24)$$

Ces simplifications conduisent en outre à la nullité des angles  $\alpha_x$  et  $\beta$  à l'équilibre. Pour mener l'étude aux variations, on introduit (3.25) où les lettres minuscules correspondent aux petites variations des différentes grandeurs autour du point d'équilibre.

$$\begin{cases} U = U_e + u \\ V = v \\ W = w \end{cases} \quad \begin{cases} P_s = p_s \\ Q_s = q_s \\ R_s = r_s \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi = \phi \\ \Theta = \Theta_e + \theta \\ \Psi = \Psi_e + \psi \end{cases} \quad (3.25)$$

De plus, pour toute grandeur  $A$  liée aux forces et moments aérodynamiques ( $X_a, Y_a, Z_a, L_a, M_a$  et  $N_a$ ) et de poussée ( $X_T, Y_T, Z_T, L_T, M_T$  et  $N_T$ ), on introduit (3.26) où  $A_e$  est la valeur à l'équilibre et où  $\Delta A$  représente la variation autour de cette valeur d'équilibre.

$$A = A_e + \Delta A. \quad (3.26)$$

Dans cette configuration, les angles d'incidence et de dérapage (3.8) vérifient au premier ordre les relations :

$$w \approx \alpha_x U_e, \quad v \approx \beta U_e.$$

De plus, pour une pente nulle à l'équilibre, la relation (3.10) conduit à :

$$\Theta_e = \alpha_e.$$

### 3.3.2 Développement des équations scalaires

On établit dans cette partie les équations linéarisées du vol en croisière pour une condition de vol donnée  $(V_T, h)$ . Pour cela, les équations vectorielles (3.11) et (3.12) ont été projetées dans le repère stabilité. Les équations scalaires ainsi obtenues sont données en Annexe A.2. De ces 6 équations scalaires, on obtient les conditions d'équilibre ainsi que la dynamique linéarisée présentées ci-dessous. Rappelons que l'ensemble des moments intervenant dans la modélisation sont calculés relativement au centre de gravité courant  $G$  de l'avion.

#### 3.3.2.1 Points d'équilibre

Pour une condition de vol en croisière donnée  $(V_T, h)$ , les équations non linéaires de la dynamique de l'avion sont prises à l'équilibre de manière à caractériser les points d'équilibre. Cela conduit à l'obtention des conditions d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} X_{a,e} + \cos(\alpha_e + \alpha_T)F_{T_e} = 0 \\ Y_{a,e} = 0 \\ Z_{a,e} - \sin(\alpha_e + \alpha_T)F_{T_e} + mg = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_{a,e} + L_{T,e} = 0 \\ M_{a,e} + M_{T,e} = 0 \\ N_{a,e} + N_{T,e} = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Les conditions d'équilibre (3.27) semblent à première vue ne pas faire intervenir la position du centre de gravité de l'avion. Elles en dépendent néanmoins implicitement puisque les moments aérodynamiques (3.17) et le moment résultant de la force de poussée (3.22) en dépendent. La position d'équilibre s'avère donc, en plus de la condition de vol, être une fonction de la masse et de la position du centre de gravité de l'avion :

$$X_{eq} = \begin{bmatrix} \alpha_e & \delta_{e,e} & \delta_{t,e} & \dots \end{bmatrix}^\top = f(V_T, h, m, \Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

Pour une condition de vol donnée, la linéarisation du modèle doit donc être effectuée en un point qui est fonction de la masse et du centrage.

#### 3.3.2.2 Linéarisation autour du point d'équilibre

La linéarisation des équations conduit aux systèmes (3.28) et (3.29). Remarque : les produits et moments d'inertie sont ici exprimés dans le repère stabilité. Les formules permettant de les calculer à partir de la matrice d'inertie exprimée dans  $\mathcal{R}_b$  sont données en Annexe A.1.

$$\begin{cases} \Delta X_{a,T} = m [g\theta + \dot{u} - \dot{r}_s \Delta y + \dot{q}_s \Delta z] \\ \Delta Y_{a,T} = m [-g \cos(\Theta_e) \phi + \dot{v} + U_e r_s + \dot{r}_s \Delta x - \dot{p}_s \Delta z] \\ \Delta Z_{a,T} = m [\dot{w} - U_e q_s - \dot{q}_s \Delta x + \dot{p}_s \Delta y] \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} \Delta L_{a,T} = (I_x - m \{ \Delta y^2 + \Delta z^2 \}) \dot{p}_s - (I_{xy} - m \Delta x \Delta y) \dot{q}_s - (I_{xz} - m \Delta x \Delta z) \dot{r}_s \\ \Delta M_{a,T} = -(I_{xy} - m \Delta x \Delta y) \dot{p}_s + (I_y - m \{ \Delta x^2 + \Delta z^2 \}) \dot{q}_s - (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) \dot{r}_s \\ \Delta N_{a,T} = -(I_{xz} - m \Delta x \Delta z) \dot{p}_s - (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) \dot{q}_s + (I_z - m \{ \Delta x^2 + \Delta y^2 \}) \dot{r}_s \end{cases} \quad (3.29)$$

### 3.3.2.3 Orientation linéarisée de l'avion

La linéarisation des équations cinématiques de l'avion (3.14) permet d'exprimer la relation liant la dérivée des angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  et les composantes  $p_s$ ,  $q_s = q$  et  $r_s$  du vecteur vitesse de rotation de l'avion exprimé dans le repère stabilité. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \sec(\Theta_e) p_s \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{\psi} = \tan(\Theta_e) p_s + r_s \end{cases} \quad (3.30)$$

### 3.3.2.4 Linéarisation des composantes aérodynamiques

Les forces et moments aérodynamiques sont des fonctions hautement non linéaires du vecteur d'état de l'avion (vitesse linéaire, vitesse de rotation, angle d'attaque et angle de dérapage) et de la position des gouvernes. Ils dépendent également de l'altitude de vol et de la température. De manière à modéliser ces forces et moments aérodynamiques, la méthode généralement utilisée dans le cadre des petites perturbations est celle dite de Bryan. Cette méthode se base sur l'hypothèse que l'on peut localement approximer les efforts aérodynamiques par un développement de Taylor à l'ordre 1. Ainsi, pour  $A$  un représentant des efforts aérodynamiques s'exerçant sur le système :

$$A \approx A_0 + A_u u + A_{\dot{u}} \dot{u} + \dots + A_{\delta_a} \delta_a + A_{\dot{\delta}_a} \dot{\delta}_a.$$

Les coefficients  $A_u$ ,  $A_{\dot{u}}$ , ...,  $A_{\delta_a}$ ,  $A_{\dot{\delta}_a}$  sont appelés les dérivées de stabilité de l'avion (McRuer *et al.* (1973); Nelson (1997); Yechout (2003); Pamadi (2004)) et ont pour expression :

- lorsque  $A$  représente l'une des trois composantes des forces aérodynamiques,

$$A_d = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial A}{\partial d} \right)_0 ;$$

- pour les trois composantes des moments aérodynamiques,

$$L_d = \frac{1}{I_x} \left( \frac{\partial L_a}{\partial d} \right)_0, \quad M_d = \frac{1}{I_y} \left( \frac{\partial M_a}{\partial d} \right)_0, \quad N_d = \frac{1}{I_z} \left( \frac{\partial N_a}{\partial d} \right)_0,$$

où  $d$  est l'une des variables du système (position, vitesse, etc) et où l'indice « 0 » indique que la dérivée est évaluée au point d'équilibre. La modélisation prise en référence dans ce mémoire est tirée des ouvrages (Nelson (1997); Stevens et Lewis (2003)) et prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta X_a/m = X_u u + X_\alpha \alpha_x + X_q q + X_{\delta_e} \delta_e \\ \Delta Y_a/m = Y_\beta \beta + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r \\ \Delta Z_a/m = Z_u u + Z_\alpha \alpha_x + Z_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + Z_q q + Z_{\delta_e} \delta_e \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \Delta L_a/I_x = L_\beta \beta + L_p p + L_r r + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r \\ \Delta M_a/I_y = M_u u + M_\alpha \alpha_x + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e \\ \Delta N_a/I_z = N_\beta \beta + N_p p + N_r r + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r \end{cases} \quad (3.32)$$

### 3.3.2.5 Linéarisation de la poussée

La force de poussée  $F_T$  est principalement fonction de la position de la manette des gaz  $\delta_t$ , de la vitesse de l'avion par rapport à la masse d'air et de l'altitude de vol. Les dérivées de stabilité associées à la poussée prennent la forme :

$$\begin{cases} \Delta X_T/m = X_{T_u} u + X_{\delta_t} \delta_t \\ \Delta Y_T/m = 0 \\ \Delta Z_T/m = Z_{T_u} u + Z_{\delta_t} \delta_t \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta L_T/I_x = L_{T_u} u + L_{\delta_t} \delta_t \\ \Delta M_T/I_y = M_{T_u} u + M_{\delta_t} \delta_t \\ \Delta N_T/I_z = N_{T_u} u + N_{\delta_t} \delta_t \end{cases} \quad (3.33)$$

On définit la dérivée de stabilité de la poussée relativement à la vitesse  $u$  et à la position de la manette des gaz  $\delta_t$  par :

$$F_{T_u} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial F_T}{\partial u} \right)_0, \quad F_{\delta_t} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial F_T}{\partial \delta_t} \right)_0.$$

Le calcul explicite des moments induits par la force de poussée et leur linéarisation aboutit aux expressions pour les dérivées de stabilité relatives à la poussée :

$$\begin{cases} X_d = \cos(\alpha_e + \alpha_T) F_d \\ Z_d = -\sin(\alpha_e + \alpha_T) F_d \\ L_d = \frac{m}{I_x} \Delta y \sin(\alpha_e + \alpha_T) F_d \\ M_d = \frac{m}{I_y} [(z_T - \Delta z) \cos(\alpha_e + \alpha_T) + (x_T - \Delta x) \sin(\alpha_e + \alpha_T)] F_d \\ N_d = \frac{m}{I_z} \Delta y \cos(\alpha_e + \alpha_T) F_d \end{cases}$$

où  $d$  correspond soit à la vitesse  $u$  soit à la position de la manette des gaz  $\delta_t$ . On remarque que si le centre de gravité se situe dans la plan de symétrie de l'avion<sup>2</sup>, les moments résultants de la poussée suivant les axes  $\mathbf{x}_s$  et  $\mathbf{z}_s$  sont alors nuls.

### 3.3.3 Représentation d'état

La dynamique linéarisée du vol en croisière prend au final la forme de la représentation d'état suivante :

$$E\dot{X} = AX + BU, \quad (3.34)$$

où :

$$X = \begin{bmatrix} u & \beta & \alpha_x & \phi & \theta & \psi & p_s & q & r_s \end{bmatrix}^\top, \quad U = \begin{bmatrix} \delta_a & \delta_e & \delta_r & \delta_t \end{bmatrix}^\top, \quad (3.35)$$

les matrices  $E$  et  $A$  sont données à la page suivante et :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & X_{\delta_e} & 0 & X_{\delta_t} \\ Y_{\delta_a} & 0 & Y_{\delta_r} & 0 \\ 0 & Z_{\delta_e} & 0 & Z_{\delta_t} \\ L_{\delta_a} & 0 & L_{\delta_r} & L_{\delta_t} \\ 0 & M_{\delta_e} & 0 & M_{\delta_t} \\ N_{\delta_a} & 0 & N_{\delta_r} & N_{\delta_t} \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

L'offset sur la position du centre de gravité se traduit donc au niveau des équations de la mécanique du vol par les éléments suivants :

- un point d'équilibre et les dérivées de stabilité associées qui sont fonction de la masse et du centrage ;
- un moment exercé par la poussée qui affecte les moments en roulis et en lacet dès lors que  $\Delta y$  est non nul ;
- un couplage de la dynamique d'évolution de la vitesse  $u$ , de l'angle d'attaque  $\alpha_x$  et de l'angle de dérapage  $\beta$  avec les vitesses de rotation de l'avion en roulis, tangage et lacet ;
- un incrément de la matrice d'inertie de l'avion résultant du transfert du point en lequel est calculé l'équation des moments.

---

2. i.e.  $\Delta y = 0$ .



$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta z & -\Delta y \\ 0 & U_e & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta z & 0 & \Delta x \\ 0 & 0 & U_e - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & \Delta y & -\Delta x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - m\{\Delta y^2 + \Delta z^2\}/I_x & (-I_{xy} + m\Delta x \Delta y)/I_x & (-I_{xz} + m\Delta x \Delta z)/I_x \\ 0 & 0 & -M_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & (-I_{xy} + m\Delta x \Delta y)/I_y & 1 - m\{\Delta x^2 + \Delta z^2\}/I_y & (-I_{yz} + m\Delta y \Delta z)/I_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-I_{xz} + m\Delta x \Delta z)/I_z & (-I_{yz} + m\Delta y \Delta z)/I_z & 1 - m\{\Delta x^2 + \Delta y^2\}/I_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$A = \begin{bmatrix} X_u + X_{T_u} & 0 & X_{\alpha} & 0 & -g & 0 & 0 & X_q & 0 \\ 0 & Y_{\beta} & 0 & g \cos(\Theta_e) & 0 & 0 & Y_p & 0 & -U_e + Y_r \\ Z_u + Z_{T_u} & 0 & Z_{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & U_e + Z_q & 0 \\ L_{T_u} & L_{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_p & 0 & L_r \\ M_u + M_{T_u} & 0 & M_{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_q & 0 \\ N_{T_u} & N_{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_p & 0 & N_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sec(\Theta_e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tan(\Theta_e) & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

### 3.3.4 Découplage des équations

Classiquement, les équations linéarisées du vol en croisière se découpent pour former deux systèmes régissant pour l'un le mouvement latéral et pour l'autre le mouvement longitudinal de l'avion. Les variables se répartissent ainsi :

- dynamique longitudinale :  $u$ ,  $\alpha_x$ ,  $\theta$ ,  $q$ ,  $\delta_e$  et  $\delta_t$  ;
- dynamique latérale :  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $p_s$ ,  $r_s$ ,  $\delta_a$  et  $\delta_r$ .

En analysant la représentation d'état obtenue précédemment, on constate qu'un tel découplage des équations est possible si et seulement si les conditions suivantes sont réunies :

$$\Delta y = 0, I_{xy} = I_{yz} = 0.$$

Le découplage est donc possible si et seulement si le plan  $\mathbf{x}_b$ - $\mathbf{z}_b$  est un plan de symétrie quant à la répartition de la masse de l'avion. Sous cette hypothèse, on obtient le découplage présenté ci-dessous :

$$E\dot{X} = AX + BU. \quad (3.39)$$

#### – Dynamique longitudinale

$$X = \begin{bmatrix} u & \alpha_x & \theta & q \end{bmatrix}^\top, \quad U = \begin{bmatrix} \delta_e & \delta_t \end{bmatrix}^\top, \quad (3.40)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta z \\ 0 & U_e - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & -\Delta x \\ 0 & -M_{\dot{\alpha}} & 0 & 1 - m \{ \Delta x^2 + \Delta z^2 \} / I_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

$$A = \begin{bmatrix} X_u + X_{T_u} & X_\alpha & -g & X_q \\ Z_u + Z_{T_u} & Z_\alpha & 0 & U_e + Z_q \\ M_u + M_{T_u} & M_\alpha & 0 & M_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$B = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_t} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_t} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

– Dynamique latérale

$$X = \begin{bmatrix} \beta & \phi & p_s & r_s \end{bmatrix}^\top, \quad U = \begin{bmatrix} \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}^\top, \quad (3.44)$$

$$E = \begin{bmatrix} U_e & 0 & -\Delta z & \Delta x \\ 0 & 0 & 1 - m\Delta z^2/I_x & (-I_{xz} + m\Delta x\Delta z)/I_x \\ 0 & 0 & (-I_{xz} + m\Delta x\Delta z)/I_z & 1 - m\Delta x^2/I_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$A = \begin{bmatrix} Y_\beta & g \cos(\Theta_e) & Y_p & -U_e + Y_r \\ L_\beta & 0 & L_p & L_r \\ N_\beta & 0 & N_p & N_r \\ 0 & 0 & \sec(\Theta_e) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$B = \begin{bmatrix} X_{\delta_a} & X_{\delta_r} \\ Z_{\delta_a} & Z_{\delta_r} \\ M_{\delta_a} & M_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Notons qu'une étude menée en Annexe A.4 pour plusieurs exemples d'avions montre que la matrice  $E$  des dynamiques latérale et longitudinale sont inversibles pour l'ensemble des valeurs admissibles de déplacement du centre de gravité de l'avion.

### 3.3.5 Dérivées de stabilité adimensionnées

Les représentations d'état obtenues précédemment font intervenir les dérivées de stabilité. En général, on ne trouve pas directement dans les tables les valeurs de ces dérivées de stabilité mais celles des dérivées de stabilité adimensionnées dans le système NACA<sup>3</sup> (Etkin et Reid (1995)). On renvoie le lecteur à l'Annexe A.5 pour plus de détails sur les dérivées de stabilité adimensionnées et leur lien avec les dérivées de stabilité classiques.

---

3. *National Advisory Committee for Aeronautics.*

## CHAPITRE 4

### ANALYSE EN BOUCLE OUVERTE

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude numérique de l'impact de la position du centre de gravité et de la masse sur la dynamique de l'avion en boucle ouverte. L'objectif est ainsi d'identifier le ou les modes de l'avion les plus sensibles quant aux variations des paramètres de masse et de centrage. L'avion pris en référence dans ce mémoire est le *Fighting Falcon F-16*. Ce choix s'explique par le fait que cet avion a fait l'objet d'une diffusion importante de ses données de modélisation à travers un rapport de la NASA (Nguyen *et al.* (1979)) et qu'il est aujourd'hui très difficile de se procurer de telles informations pour des avions modernes, ces dernières étant généralement couvertes par le secret industriel. Les caractéristiques physiques du F-16, ainsi que la modélisation du turboréacteur et des coefficients aérodynamiques sous la forme de fonctions polynomiales sont présentées en Annexe B.

On présente dans la Section 4.1 les premières propriétés du F-16 en boucle ouverte ainsi que les modes de l'avion. L'impact des variations de la position du centre de gravité suivant les trois axes du repère avion sur la dynamique du F-16 est présenté à travers l'étude de lieux des racines à la Section 4.2. La Section 4.3 est quant à elle consacrée à l'étude de l'impact des variations de masse sur la dynamique du F-16. Le chapitre s'achève par la Section 4.4 qui résume brièvement les résultats obtenus et identifie les éléments de la dynamique sur lesquels porteront le problème de contrôle.

#### 4.1 Premières propriétés du F-16 et mise en évidence des modes de l'avion

La méthode utilisée afin d'obtenir numériquement les points d'équilibre et les modèles linéarisés de la dynamique de l'avion est présentée en Annexe C. Elle consiste en la minimisation d'une fonction coût afin d'obtenir un point vérifiant les conditions d'équilibre (3.27), point qui est ensuite injecté dans le modèle linéarisé de l'avion. On applique cette méthode en quelques points de vol pour mettre en avant les premières propriétés du F-16 en boucle ouverte et pour introduire les différents modes de l'avion.

##### 4.1.1 Instabilité aérodynamique du F-16 en boucle ouverte

On considère dans un premier temps la condition de vol ( $V_T = 0.9 \text{ M}$ ,  $h = 0 \text{ m}$ ) pour des paramètres de masse et centrage nominaux, soit une masse de 9300 kg et un centre de gravité

placé à 35% mac<sup>1</sup>. Le calcul du point d'équilibre de l'avion ainsi que de la représentation d'état associée (après inversion de la matrice  $E$ ) mène au résultat suivant :

$$\alpha_e = -0.864^\circ, \delta_{e,e} = -1.999^\circ, \delta_{t,e} = 0.553,$$

$$A = \begin{bmatrix} -2.99 \times 10^{-2} & 4.47 \times 10^1 & -9.81 & 7.68 \times 10^{-1} \\ -2.11 \times 10^{-4} & -2.41 & 0 & 9.07 \times 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.74 \times 10^{-18} & 3.61 & 0 & -2.07 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7.84 \times 10^{-2} & 8.01 \\ -4.19 \times 10^{-3} & 3.95 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 \\ -7.54 \times 10^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les pôles du système sont alors donnés par :

$$sp_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ -4.05, -0.390, -0.104, 0.0456 \right\}.$$

La présence d'un pôle à partie réelle strictement positive confirme le fait que le F-16 est nominalement instable en boucle ouverte pour les vols subsoniques.

#### 4.1.2 Modes de la dynamique longitudinale

Dans sa configuration nominale, le F-16 est instable et présente quatre pôles réels qui ne font pas apparaître la structure classique de la dynamique longitudinale d'un avion. Pour présenter cette structure, on se place dans un cas de figure où l'avion est nominalement stable. C'est par exemple le cas lorsque le centre de gravité de l'avion est positionné à 15% mac<sup>2</sup>. Pour la condition de vol ( $V_T = 0.6 \text{ M}$ ,  $h = 0 \text{ m}$ ), les pôles du système sont alors donnés par :

$$sp_{\mathbb{C}}(A) = \left\{ -2.43 \pm 4.77i, -0.0111 \pm 0.0640i \right\}.$$

Le système présente deux pôles complexes conjugués, constituant les modes *Short Period* et Phugoïde (Fig 4.1). Les caractéristiques de ces modes sont résumées dans les Tableaux 4.1 et 4.2.

Le **mode *Short Period*** est un mode oscillatoire agissant aux moyennes fréquences. Ce mode converge rapidement et constitue la réponse à court terme de l'avion. La dynamique d'établissement de la vitesse de l'avion étant lente, on considère généralement que la variation à court terme de cette dernière est négligeable vis-à-vis du mode *Short Period*. Le comportement de ce dernier est alors principalement dominé par la dynamique d'évolution de l'angle d'attaque  $\alpha_x$  et par la vitesse en tangage  $q$ .

---

1. Mean aerodynamic chord.

2. i.e.  $\Delta x = 0.2\bar{c}$ .

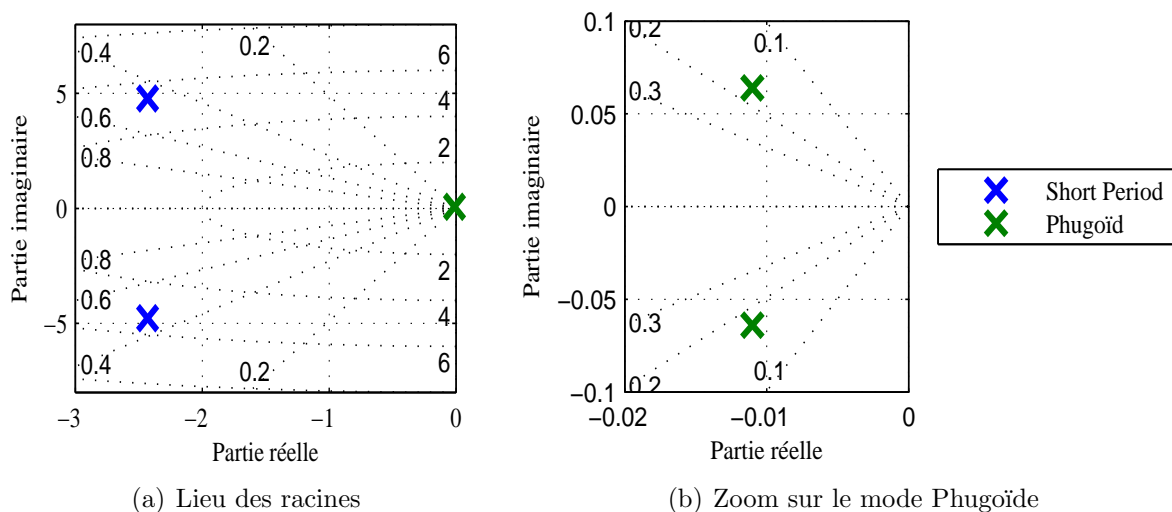


Figure 4.1 Modes de la dynamique longitudinale

Tableau 4.1 Caractéristiques des modes de la dynamique longitudinale

	Constante de temps	Pulsation naturelle	Amortissement
<i>Short Period</i>	0.41 s	5.36 rad/s	0.454
Phugoïde	90.0 s	$6.50 \times 10^{-2}$ rad/s	0.170

Tableau 4.2 Vecteurs propres des modes de la dynamique longitudinale

	<i>Short Period</i>		Phugoïde	
$\begin{bmatrix} u \\ \alpha_x \\ \theta \\ q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.39 \times 10^{-1} \\ 2.91 \times 10^{-2} \\ 7.96 \times 10^{-2} \\ -9.39 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$	$\pm \begin{bmatrix} -1.28 \times 10^{-2} \\ 1.71 \times 10^{-1} \\ 1.56 \times 10^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00 \\ -5.31 \times 10^{-5} \\ -1.20 \times 10^{-3} \\ -4.31 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$	$\pm \begin{bmatrix} 0 \\ 4.77 \times 10^{-7} \\ 6.51 \times 10^{-3} \\ 4.67 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$

Le **mode Phugoïde** est également un mode oscillatoire mais qui présente une vitesse de convergence faible et des oscillations lentes. Ce mode constitue la réponse à moyen terme de l'avion. Il voit ses composantes liées à l'angle d'attaque  $\alpha_x$  et à la vitesse de rotation en tangage  $q$  être négligeables devant les variables de vitesse  $u$  et d'angle de tangage  $\theta$ .

#### 4.1.3 Modes de la dynamique latérale

Afin de mettre en avant les modes de la dynamique latérale de l'avion, on se place dans la configuration nominale du F-16. Pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 \text{ M}$ ,  $h = 10000 \text{ m}$ ), les

pôles du système sont les suivants :

$$\text{sp}_C(A) = \left\{ -2.1, \quad -0.231 \pm 3.70i, \quad -0.0062 \right\}.$$

Le système présente deux pôles réels et deux pôles complexes conjugués, constituant les modes Roulis, Roulis Hollandais et Spiral (Fig. 4.2). Les caractéristiques de ces modes sont résumées dans les Tableaux 4.3 et 4.4.

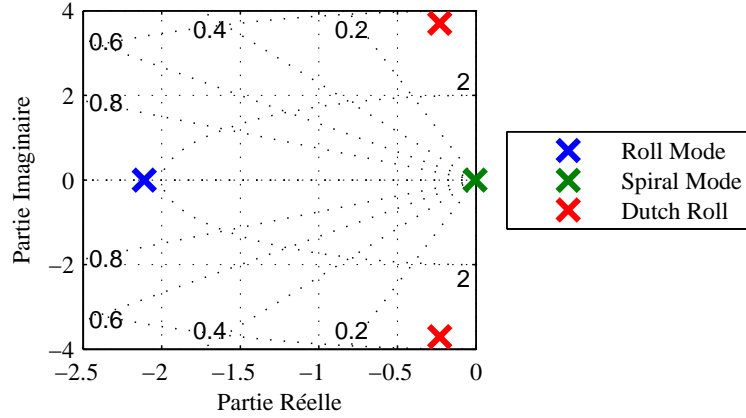


Figure 4.2 Modes de la dynamique latérale

Tableau 4.3 Caractéristiques des modes de la dynamique latérale

	Constante de temps	Pulsation naturelle	Amortissement
Mode Roulis	0.47 s	-	-
Mode Spiral	191 s	-	-
Roulis Hollandais	4.33 s	3.71 rad/s	$6.22 \times 10^{-2}$

Tableau 4.4 Vecteurs propres des modes de la dynamique latérale

	Mode Roulis	Mode Spiral	Roulis Hollandais	
$\beta$	$-1.21 \times 10^{-4}$	$-7.52 \times 10^{-4}$	$-5.22 \times 10^{-2}$	$-9.11 \times 10^{-2}$
$\phi$	$4.28 \times 10^{-1}$	1.00	$-1.48 \times 10^{-2}$	$-2.37 \times 10^{-1}$
$p_s$	$-9.04 \times 10^{-1}$	$6.15 \times 10^{-3}$	$8.80 \times 10^{-1}$	0
$r_s$	$1.55 \times 10^{-2}$	$-3.61 \times 10^{-2}$	$-3.52 \times 10^{-1}$	$1.81 \times 10^{-1}$

Le **mode Roulis** est constitué d'un unique pôle qui est exponentiellement stable et qui est principalement dominé par l'angle  $\phi$  et la vitesse en roulis  $p_s$ . Ce mode caractérise ainsi la rapidité de l'avion à créer du roulis, ce qui constitue l'un des principaux critères de performance d'un avion. Dans le cas présent, la constante de temps du mode Roulis est de 0.37 s,

ce qui indique que ce mode est rapide.

Le **mode Spiral**, qui est principalement dominé par l'angle  $\phi$  et la vitesse en lacet  $r_s$ , est également constitué d'un unique pôle réel qui se situe généralement proche de 0, pouvant être stable ou instable selon les configurations. Cette proximité avec l'origine du plan complexe se traduit par une grande constante de temps, amenant selon les cas l'avion à se stabiliser ou à diverger lentement. Dans le cas d'un pôle instable, la divergence se traduit par un mouvement dans lequel l'avion plonge lentement vers le sol en décrivant une spirale dans le ciel. Habituellement, ce mode instable est si lent qu'il est corrigé instinctivement par le pilote. Il peut néanmoins arriver que si le pilote ne voit pas l'horizon, ce dernier ne se rende pas compte de la plongée vers le sol de l'avion, entraînant généralement le crash. Dans le cas ici étudié, ce mode est exponentiellement stable avec une constante de temps de 208 s.

Le **mode Roulis Hollandais** est quant à lui un mode oscillatoire stable principalement dominé par les vitesses de rotation en roulis  $p_s$  et en lacet  $r_s$ . Ce mode est particulièrement sollicité lorsque la gouverne de direction est actionnée, créant un mouvement de l'avion combinant rotations en lacet et en roulis. L'analyse des pôles de ce mode montre que la période des oscillations est petite, dans le cas étudié 1.38 s, pour un amortissement très faible de 0.057. Un tel mode rend en l'état l'avion très inconfortable à piloter, rendant nécessaire l'introduction de contrôleurs afin de rencontrer de meilleures performances.

## 4.2 Impact du centrage sur la dynamique de l'avion

Les différents modes de l'avion ayant été introduits, on étudie leur évolution en fonction du centrage de l'appareil. L'objectif de cette section est de mettre en avant les modes qui sont les plus affectés par les variations de position du centre de gravité. Pour cela, on va successivement étudier l'impact des déplacements latéraux, longitudinaux et verticaux du centre de gravité de l'avion sur sa dynamique.

### 4.2.1 Impact des déplacements latéraux

L'envergure du F-16 étant de 9.96 m, on va considérer un déplacement latéral du centre de gravité de plus ou moins un demi-mètre autour de sa position de référence. Cette position étant située dans le plan de symétrie de l'avion, il suffit d'étudier l'évolution de la dynamique de l'avion pour un  $\Delta y$  compris entre 0 et 1 m, celle pour les  $\Delta y$  négatifs s'en déduisant par



symétrie. Le lieu des racines de la dynamique du F-16 en fonction de la position latérale du centre de gravité est tracé sur la Figure 4.3 pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 M, h = 0 m$ ). Cette étude a été effectuée pour un F-16 dont le centre de gravité est positionné à 15% mac<sup>3</sup>, configuration pour laquelle l'avion est stable et ses modes sont non dégénérés<sup>4</sup>.

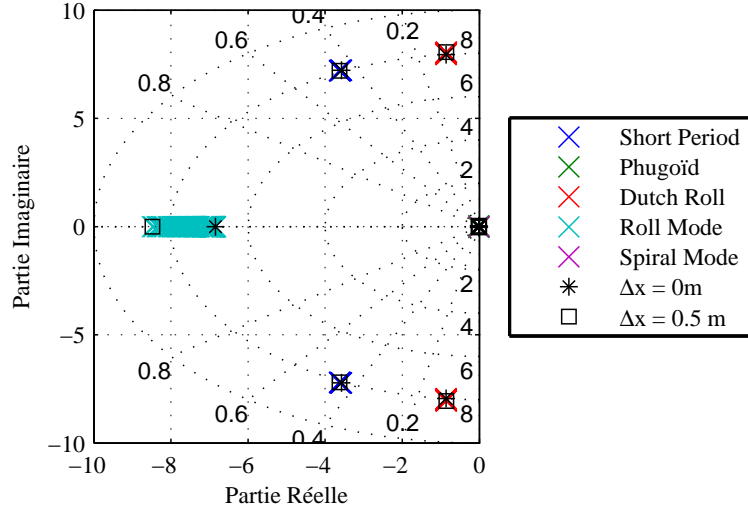


Figure 4.3 Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de  $\Delta y$

On observe premièrement que sur la plage de variation considérée, la nature des pôles du système est préservée (pas de combinaison de pôles réels en pôles complexes conjugués et inversement). De plus, à l'exception du mode Roulis, l'impact du déplacement latéral du centre de gravité sur la dynamique de l'avion est mineur, les positions des pôles ne variant que très peu dans le plan complexe. Les caractéristiques de ces modes (temps de réponse, amortissement, période d'oscillation) sont donc conservées en dépit des variations de  $\Delta y$ .

Pour le mode Roulis, on constate que plus le centre de gravité s'éloigne du plan de symétrie de l'avion, plus le pôle associé au mode Roulis se déplace vers la gauche du plan complexe. Ce mode converge donc de plus en plus rapidement, alors même qu'il est déjà pour la position de référence du centre de gravité le pôle le plus rapide.

L'étude menée montre que le déplacement latéral du centre de gravité n'a pas d'impact significatif ni sur la stabilité du F-16, ni sur ses performances (conservation des temps de réponse, des amortissements et des périodes d'oscillation).

3. i.e.  $\Delta x = 0.2\bar{c}$ .

4. i.e. la dynamique fait apparaître les modes classiques *Short Period*, Phugoïde, Roulis, Roulis Hollandais et Spiral.

### 4.2.2 Impact des déplacements longitudinaux

La longueur du F-16 étant de 15.06 m, on va considérer un déplacement longitudinal du centre de gravité de plus ou moins 1 mètre autour sa position de référence. La Sous-Section 3.3.4 ayant mis en avant qu'en l'absence de déplacement latéral du centre de gravité de l'avion, dynamiques longitudinale et latérale sont découplées, on va étudier successivement l'impact de la variation longitudinale du centre de gravité sur les deux dynamiques.

#### 4.2.2.1 Dynamique longitudinale

Le lieu des racines est tracé pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 M$ ,  $h = 0 m$ ) à la Figure 4.4. Il est représentatif de ce que l'on obtient pour l'ensemble des conditions de vol du comportement de la dynamique longitudinale de l'avion lorsque son centre de gravité évolue dans la direction longitudinale. Le comportement global décrit ci-dessous est ainsi valable pour toutes les conditions de vol situées dans les limites suivantes : altitude de vol comprise entre 0 et 15 km d'altitude<sup>5</sup> et une vitesse inférieure à Mach 1<sup>6</sup>. Seules les valeurs numériques indiquées dans l'étude ci-dessous sont valables uniquement pour la condition de vol ici considérée, ces dernières changeant avec la vitesse et l'altitude.

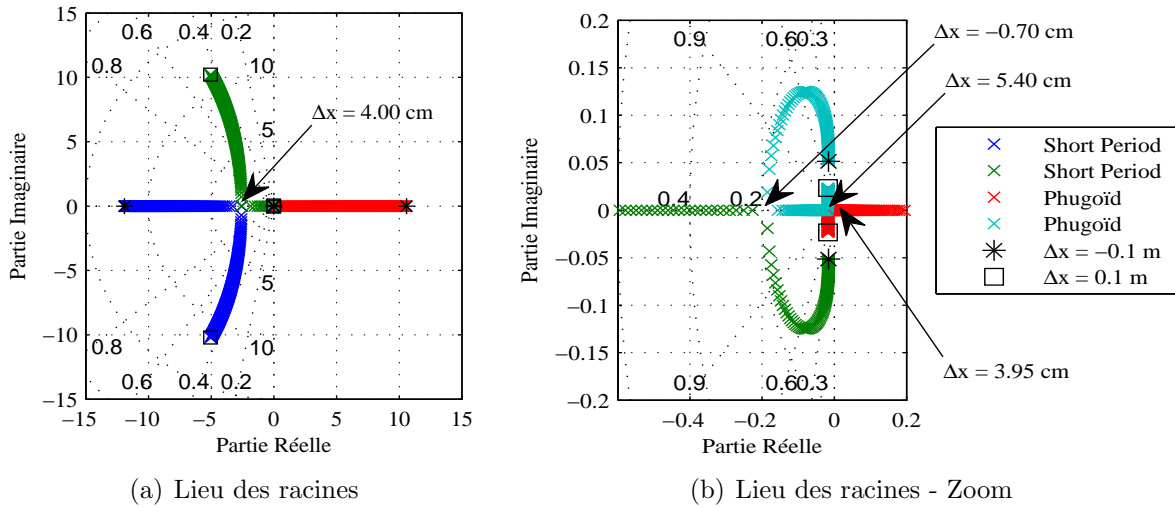


Figure 4.4 Lieu des racines de la dynamique longitudinale en fonction de  $\Delta x$

Lorsque le centre de gravité est à l'avant de l'avion, la dynamique longitudinale est stable et on retrouve les deux modes classiques. Lorsque le centre de gravité évolue en reculant vers l'arrière de l'avion, les deux pôles complexes conjugués du mode Phugoïde se rapprochent de

5. Limitations du F-16.

6. Plage de validité des coefficients aérodynamiques utilisés dans la modélisation.

l'axe des réels jusqu'à se rencontrer pour  $\Delta x = 5.40$  cm. Si l'on recule le centre de gravité en-dessous de cette valeur, ces deux pôles deviennent réels, l'un devenant de plus en plus négatif alors que le second voit sa valeur croître vers les réels positifs, rendant le système instable pour  $\Delta x \leq 3.95$  cm. Le mode *Short Period* présente la même évolution que le mode Phugoïde. Ses deux pôles sont initialement complexes conjugués mais se rapprochent d'autant plus de l'axe des réels que le centre de gravité recule, jusqu'à s'y rencontrer pour  $\Delta x = 4.00$  cm. Si l'on continue de reculer le centre de gravité, l'un des pôles devient de plus en plus négatif alors que le second pôle voit sa valeur croître jusqu'à ce qu'il rencontre le pôle du mode Phugoïde dont la valeur décroît. Ces deux pôles se rencontrent sur l'axe des réels en  $\Delta x = -0.70$  cm et donnent naissance à un nouveau mode appelé le Troisième mode oscillatoire (Stevens et Lewis (2003)). Ce mode est constitué de deux pôles complexes conjugués, pôles qui vont venir converger dans le demi-plan gauche.

On remarque que contrairement aux déplacements latéraux, les déplacements longitudinaux du centre de gravité ont un grand impact sur la dynamique de l'avion, modifiant de manière profonde la nature des modes de la dynamique longitudinale. On remarque en outre que ces profondes modifications ne nécessitent pas des variations très importantes de la position longitudinale du centre de gravité puisque ces dernières interviennent autour de la position de référence sur la plage  $[-0.70 \text{ cm}, 5.40 \text{ cm}]$ . Bien qu'ici exposé dans le cadre d'une condition de vol particulière, ce resserrement de quelques centimètres autour de la position de référence du centre de gravité se retrouve pour l'ensemble des conditions de vol admissibles.

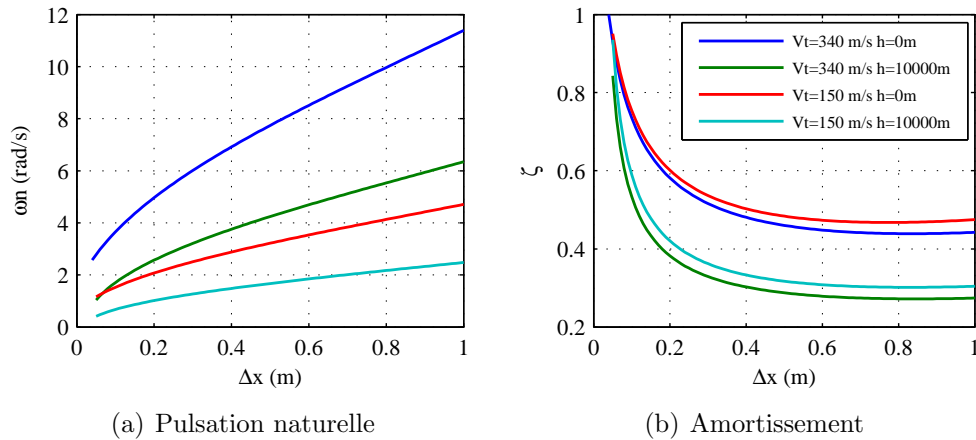


Figure 4.5 Caractéristiques du mode *Short Period* en fonction de  $\Delta x$

Notons également que le déplacement du centre de gravité suivant l'axe longitudinal de l'avion a un grand impact sur la position des pôles du mode *Short Period* lorsqu'ils sont complexes

conjugués. Pour illustrer cela, la pulsation naturelle et l'amortissement du mode *Short Period* ont été tracés pour quatre conditions de vol avec une pente nulle à la Figure 4.5. On note que plus on recule le centre de gravité proche du point pour lequel les deux pôles se rencontrent, plus la pulsation naturelle du mode faiblit et plus l'amortissement est fort. *A contrario*, plus le centre de gravité est déplacé vers l'avant de l'avion, plus la valeur de la pulsation naturelle augmente et plus l'amortissement se dégrade. Notons que la variation de l'amortissement est particulièrement sensible dans les 20 premiers centimètres au-delà de la position de référence, c'est-à-dire dans le voisinage dans lequel le centre de gravité de l'avion est susceptible de se situer.

Les développements précédents montrent donc que l'impact de la position longitudinale du centre de gravité de l'avion sur sa dynamique est particulièrement forte, et ce dans une plage de variations resserrée autour de la position nominale. Il est donc particulièrement important dans la synthèse d'un contrôleur opérant sur la dynamique longitudinale de l'avion de prendre en compte la variation de position longitudinale du centre de gravité pour élaborer un système de commandes de vol assurant la stabilité et les performances robustes.

#### 4.2.2.2 Dynamique latérale

Le lieu des racines est tracé pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 \text{ M}$ ,  $h = 0 \text{ m}$ ) à la Figure 4.6. Il est comme précédemment représentatif de ce que l'on obtient pour l'ensemble des conditions de vol du comportement de la dynamique longitudinale de l'avion lorsque son centre de gravité évolue dans la direction longitudinale.

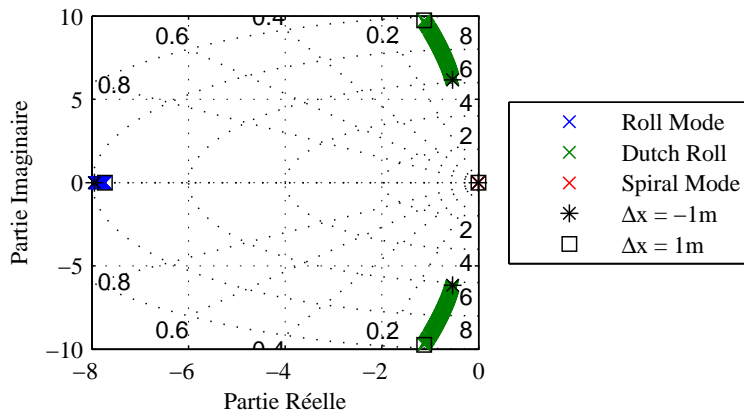


Figure 4.6 Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de  $\Delta x$

On observe que contrairement à la dynamique longitudinale, les modes conservent leur nature

en dépit de la variation de la position longitudinale du centre de gravité. Le mode Spiral voit son pôle être le moins affecté par le déplacement longitudinal du centre de gravité. Il demeure ainsi stable et purement réel avec une constante de temps quasiment indépendante de  $\Delta x$ . Le mode Roulis conserve également sa nature (1 pôle réel stable) et demeure le mode le plus rapide de la dynamique latérale. Il voit sa constante de temps légèrement varier avec la position longitudinale du centre de gravité de l'avion, mais de manière insuffisante pour venir perturber significativement la dynamique du système.

Le mode le plus affecté est le mode du Roulis Hollandais dont les deux pôles complexes conjugués voient leur constante de temps ainsi que leur pulsation naturelle diminuer lorsque le centre de gravité se déplace vers l'avant de l'avion avec un amortissement qui demeure quasi constant.

Au bilan, la dynamique latérale voit les natures de ses modes inchangées pour un déplacement longitudinal du centre de gravité de l'avion. Les modes Roulis et Spiral sont relativement peu impactés par un tel déplacement, au contraire du mode Roulis Hollandais et plus particulièrement de sa pulsation naturelle. Cet impact est néanmoins moindre en comparaison de celui observé pour la dynamique longitudinale.

### 4.2.3 Impact des déplacements verticaux

La hauteur du F-16 étant de 4.88 m, on va considérer un déplacement vertical du centre de gravité de plus ou moins un demi-mètre autour de sa position de référence. Afin d'évaluer l'impact de la position du centre de gravité sur une configuration dans laquelle l'avion est stable et dont les modes sont non dégénérés, on fixe dans cette étude la position longitudinale du centre de gravité à 15% mac<sup>7</sup>.

#### 4.2.3.1 Dynamique longitudinale

Le lieu des racines est tracé pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 M$ ,  $h = 0$  m) à la Figure 4.7. On observe que dans le cas où les modes *Short Period* et Phugoïde sont dans une configuration classique, l'impact du déplacement vertical du centre de gravité de l'avion sur la dynamique longitudinale est très minime. En particulier, les modes *Short Period* et Phugoïde conservent leur nature oscillatoire avec un amortissement et une pulsation naturelle quasi constants.

---

7. i.e.  $\Delta x = 0.2\bar{c}$ .

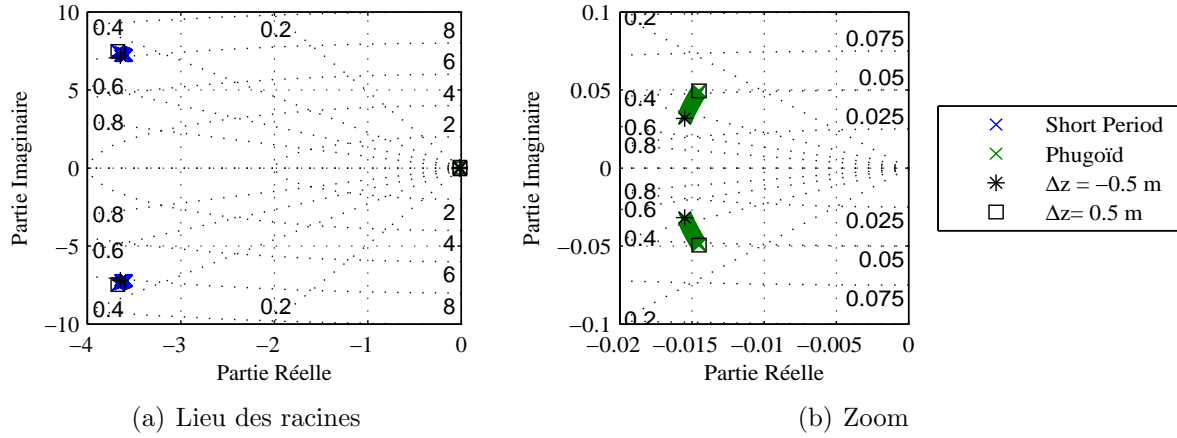


Figure 4.7 Lieu des racines de la dynamique longitudinale en fonction de  $\Delta z$

#### 4.2.3.2 Dynamique latérale

Le lieu des racines est tracé pour la condition de vol ( $V_T = 0.9$  M,  $h = 10000$  m) à la Figure 4.8. Les trois modes de la dynamique latérale conservent leur nature sur la plage de variation considérée. Le principal impact du déplacement vertical du centre de gravité se situe au niveau du mode Roulis dont le pôle se déplace sur l'axe des réels négatifs. Ce pôle demeure néanmoins stable avec un temps de réponse de loin le plus rapide de la dynamique latérale. Les modes Roulis Hollandais et Spiral ne varient quant à eux que très peu avec la position verticale du centre de gravité, conservant respectivement une pulsation naturelle/un amortissement et un temps de réponse quasi constants.

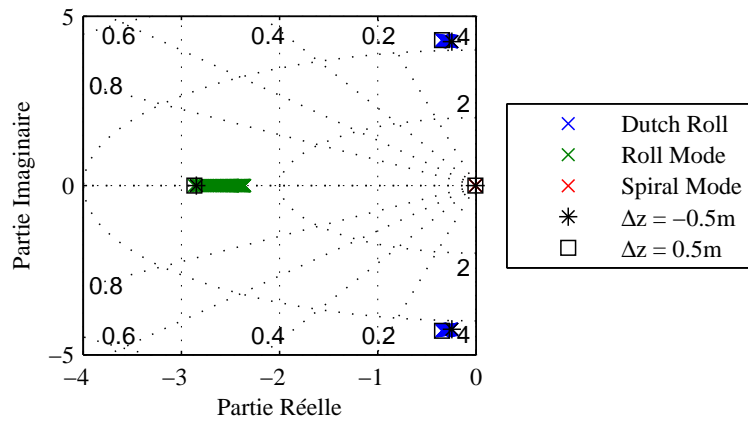


Figure 4.8 Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de  $\Delta z$

#### 4.2.4 Conclusion sur les variations de centrage

L'étude a montré que les déplacements latéraux et verticaux du centre de gravité n'ont qu'un faible impact sur la dynamique de l'avion. Le principal impact de ces déplacements se situe au niveau du mode Roulis et plus particulièrement de sa constante de temps, mais qui demeure de loin la plus rapide de la dynamique latérale. Dans la suite on négligera l'impact de ces déplacements latéraux et verticaux sur la dynamique de l'avion, conduisant à ne considérer que des déplacements longitudinaux.

Du point de vue de la dynamique de l'avion, le point clé du centrage réside donc dans la position longitudinale du centre de gravité. L'impact de cette position sur la dynamique latérale reste relativement restreint : les trois modes de l'avion voient leur nature préservée et seul le mode Roulis Hollandais se voit significativement affecté à travers la variation de sa pulsation naturelle. Le principal impact se situe au niveau de la dynamique longitudinale à travers les phénomènes suivants :

- déstabilisation de l'avion ;
- création de modes dégénérés ;
- modification importante de la pulsation naturelle et de l'amortissement du mode *Short Period*.

### 4.3 Impact des variations de masse sur la dynamique de l'avion

On s'intéresse ici à évaluer l'impact de la masse sur la dynamique de l'avion. On rappelle que la masse nominale du F-16 est prise égale à 9300 kg alors que la masse à vide est de 8570 kg et que la masse armée est de 12000 kg. Afin d'étudier l'influence de la masse sur la dynamique du F-16, la plage de variation ici considérée est de 2000 kg autour de la masse nominale, soit une variation de plus ou moins 21.5%.

#### 4.3.1 Dynamique longitudinale

À nouveau, de manière à visualiser la dynamique de l'avion dans une configuration pour laquelle il est stable, on place le centre de gravité à 15% mac. Le lieu des racines est tracé Figure 4.9 pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 M$ ,  $h = 0$  m).

Bien que la plage de variation soit très importante relativement à la masse nominale du F-16, les modes de la dynamique longitudinale ne sont que peu affectés. Les deux modes conservent leur nature oscillatoire et demeurent stables. Le mode Phugoïde voit ses pôles ne quasiment pas varier avec la masse. Le mode *Short Period* conserve une période d'oscillation

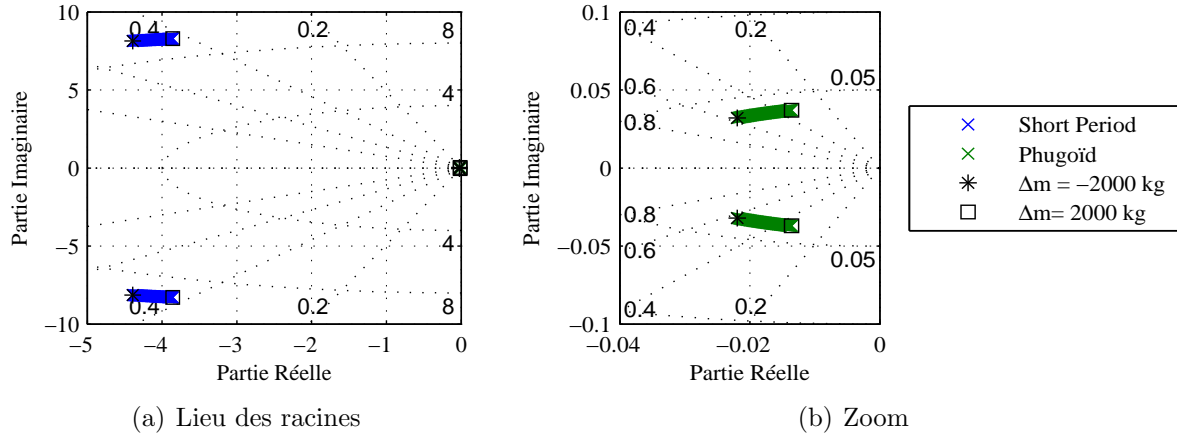


Figure 4.9 Lieu des racines de la dynamique longitudinale en fonction de la masse

quasi constante alors que le temps de réponse du mode varie significativement avec la masse, mais demeure suffisamment rapide pour ne pas perturber les performances du système.

#### 4.3.2 Dynamique latérale

Le lieu des racines est tracé pour la condition de vol ( $V_T = 0.9 M$ ,  $h = 0 m$ ) à la Figure 4.10.

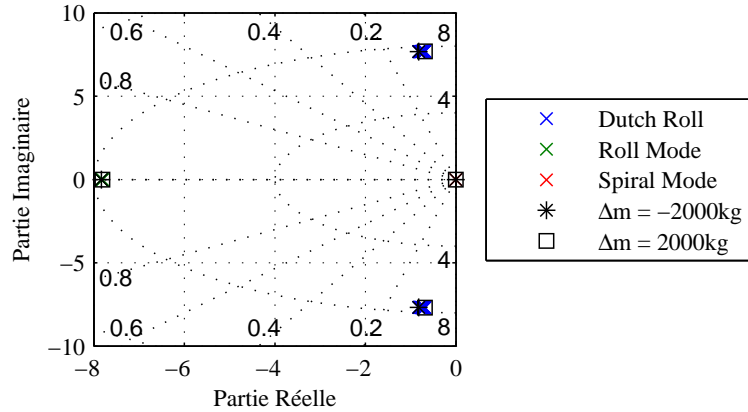


Figure 4.10 Lieu des racines de la dynamique latérale en fonction de la masse

On observe que les trois modes de la dynamique latérale sont quasi indépendants de la masse de l'avion sur la plage de variation considérée. Leurs caractéristiques (temps de réponse, période d'oscillation et amortissement) peuvent donc être considérées comme constantes vis-à-vis des variations de masse.



Tout comme dans le cas du centrage, la dynamique latérale voit ses modes être très peu affectés par les variations de masse. Une nouvelle fois, c'est la dynamique longitudinale qui est la plus sensible quant aux variations de masse, et en particulier le mode *Short Period*.

#### 4.4 Conclusion sur le centrage et la masse

Cette partie a permis de mettre en avant les résultats suivants :

- les déplacements latéraux et verticaux du centre de gravité n'ont qu'un faible impact sur la dynamique de l'avion ;
- la dynamique latérale est peu sensible quant aux variations des paramètres de masse et de centrage ;
- la forte sensibilité de la dynamique longitudinale vis-à-vis de la position longitudinale du centre de gravité de l'avion ;
- les caractéristiques du mode *Short Period* (temps de réponse, amortissement, pulsation naturelle) dépendent significativement de la position longitudinale du centre de gravité et de la masse de l'avion.

Les conclusions de cette étude poussent à se focaliser pour la suite du projet sur la dynamique longitudinale de l'avion et plus particulièrement sur le contrôle du mode *Short Period*. Il s'agit ainsi d'élaborer un système de commandes de vol permettant d'assurer le contrôle du mode *Short Period* en dépit des potentielles variations des paramètres de masse et de centrage.

## CHAPITRE 5

### «SHORT PERIOD» ET STRATÉGIE DE CONTRÔLE

Le Chapitre 4 a permis d'identifier la dynamique longitudinale et plus particulièrement le mode *Short Period* comme étant le plus sensible aux variations de masse et de centrage, notamment pour des déplacements longitudinaux du centre de gravité de l'avion. Ce chapitre commence par introduire brièvement l'architecture classique d'un système de commandes de vol à la Section 5.1. On revient plus en détails sur le mode *Short Period* dans la Section 5.2 en introduisant le facteur de charge et l'approximation dite du *Short Period*. Le facteur de charge est une grandeur étroitement liée au *Short Period*, jouant un rôle important dans le dimensionnement de l'avion et au niveau des lois de contrôle. L'approximation du *Short Period* est quant à elle une hypothèse simplificatrice classique qui va permettre de se ramener d'un système d'ordre 4 pour la dynamique longitudinale à un système d'ordre 2. Le cahier des charges du système en boucle fermée est présenté à la Section 5.3 et une architecture de contrôle du facteur de charge est introduite à la Section 5.4.

#### 5.1 Architecture de contrôle d'un avion

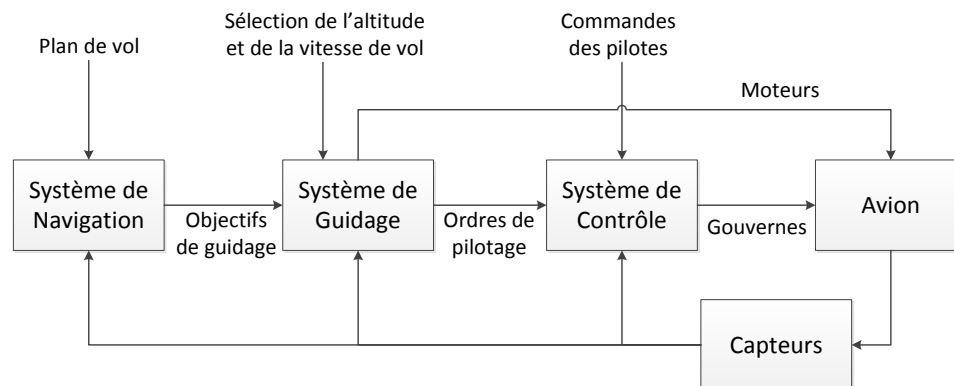


Figure 5.1 Boucles de contrôle d'un avion

On identifie classiquement trois boucles de contrôle dans l'architecture d'un système de commandes de vol ((Varga *et al.*, 2011)) :

1. une boucle de contrôle dont les consignes sont tirées des commandes du pilote et dont l'objectif est de contrôler l'avion en attitude et accélération à court terme sur une échelle de temps de l'ordre de la seconde ;

2. une boucle de guidage dont les consignes sont tirées de la sélection par les pilotes de l'altitude et de la vitesse de vol et dont l'objectif est de contrôler la vitesse et la pente de l'avion à moyen terme sur une échelle de temps de l'ordre de la dizaine de secondes ;
3. une boucle de navigation dont les consignes sont tirées du *Flight Management System* et dont l'objectif est de contrôler l'avion à long terme sur une échelle de temps de l'ordre de la minute afin que l'avion suive la trajectoire de vol prévue.

Ces boucles sont interconnectées comme indiqué à la Figure 5.1. Ce découpage entre boucle de guidage et boucle de contrôle est rendu possible de par la séparation naturelle qui existe au sein de la dynamique longitudinale de l'avion entre le mode *Short Period* et le mode Phugoïde. Le premier agit en effet à court terme sur la dynamique de l'avion alors que le second agit à moyen terme. Le mode *Short Period* est ainsi contrôlé par la boucle de contrôle via la gouverne de profondeur alors que le mode Phugoïde est contrôlé par la boucle de guidage via la manette des gaz.

Afin de contrôler le mode *Short Period*, on suppose qu'une boucle de guidage robuste aux variations de centrage et de masse peut être mise au point. Cette hypothèse nous permet de nous focaliser par la suite uniquement sur le contrôle du mode *Short Period*.

## 5.2 Mode «Short Period»

Il a été vu à la Sous-Section 4.1.2 que le *Short Period* est un mode oscillatoire agissant aux moyennes fréquences, constituant la réponse à court terme de l'avion. Ce mode est principalement dominé par la dynamique de l'angle d'attaque  $\alpha$  et de la vitesse en tangage  $q$ . On étudie dans cette section plus en détails ce mode en présentant le facteur de charge et l'approximation dite du *Short Period*.

### 5.2.1 Facteur de charge

#### 5.2.1.1 Définition

Le facteur de charge noté  $N_z$  d'un avion se définit comme étant le rapport de la portance par son poids (Saarlas (2007)). De manière équivalente, le facteur de charge s'exprime comme étant le rapport du poids apparent de l'avion, c'est-à-dire le poids ressenti de par l'addition de la force de gravité et des forces d'inertie, par son poids réel. Il s'exprime alors en nombre de  $g$  et a pour signification physique :

- $N_z < 0$  : sensation d'être projeté vers le haut ;

- $N_z = 0$  : sensation d'apesanteur ;
- $0 < N_z < 1$  : sensation de pesanteur plus faible que la pesanteur terrestre ;
- $N_z = 1$  : sensation de pesanteur terrestre ;
- $N_z > 1$  : sensation de pesanteur supérieure à la pesanteur terrestre.

Le facteur de charge est une grandeur très importante dans le dimensionnement de la structure d'un avion car il représente les efforts que ce dernier doit être en mesure de soutenir. Il est montré dans le livre (Nguyen (1993)) que pour un virage coordonné<sup>1</sup> à altitude constante, le facteur de charge est lié à la vitesse de rotation de l'avion  $\dot{\psi}$  et au rayon de courbure  $R$  via les relations :

$$\dot{\psi} = \frac{g\sqrt{N_z^2 - 1}}{V_T}, \quad R = \frac{V_T^2}{g\sqrt{N_z^2 - 1}}.$$

Ces dernières montrent que plus la vitesse de rotation de l'avion est importante et/ou plus le rayon de courbure est petit, plus le facteur de charge augmente et donc plus la charge que doit soutenir la structure est importante. À titre d'exemple, les normes européennes et américaines imposent un facteur de charge compris entre  $-1.0g$  et  $2.5g$  pour les avions civils et entre  $-3.0g$  et  $6.0g$  pour les avions de type sportif (Tischler (1996)).

### 5.2.1.2 Lien avec le *Short Period*

Classiquement, le contrôle du *Short Period* s'effectue par un retour au niveau de l'angle d'attaque de l'avion  $\alpha$  et de la vitesse de rotation en tangage  $q$ . La principale difficulté de telles boucles de contrôle réside dans la capacité à mesurer de manière précise et sans bruit excessif l'angle d'attaque de l'avion ((Stevens et Lewis, 2003; McRuer *et al.*, 1973)).

Dans le cadre du vol en croisière, la solution à ce problème consiste à remplacer le retour de l'angle d'attaque par un retour de l'accélération normale  $a_n$  de l'avion. Cette grandeur est une combinaison de l'angle d'attaque et de la vitesse de rotation en roulis et peut être mesurée de manière fiable par un accéléromètre :

$$a_n = (\dot{w} - U_e q - l_x \dot{q}) / g \approx (U_e \dot{\alpha} - U_e q - l_x \dot{q}) / g,$$

où  $a_n$  est exprimée en nombre de  $g$  et où  $l_x$  représente la distance suivant l'axe  $\mathbf{x}_b$  entre le point de référence  $O$  et le point de mesure de l'accélération. Afin de mesurer  $a_n$ , il suffit de placer un accéléromètre sur l'axe  $\mathbf{x}_b$  de l'avion et l'orienter suivant l'axe  $\mathbf{z}_b$ . L'accéléromètre mesure ainsi  $f_n$  qui, exprimé en nombre de  $g$ , est la somme de l'accélération normale  $a_n$  avec

---

1. i.e. sans dérapage.

un terme dû à la pesanteur, terme qui pour de faibles angles de gîte est égal à  $\cos(\Theta)$  :

$$f_n = a_n + \cos(\Theta) \cos(\Phi) \approx a_n + \cos(\Theta).$$

Cette mesure est liée au facteur de charge par le résultat suivant ((Stevens et Lewis, 2003)) :

$$f_n \approx N_z.$$

Cette équation traduit que pour de faibles angles, l'accélération mesurée par l'accéléromètre est en réalité le facteur de charge que subit l'avion au point de mesure. La combinaison des trois dernières équations, puis la linéarisation du facteur de charge autour de la position d'équilibre  $N_{z,e} = \cos(\Theta)$  (5.1) conduit à obtenir (5.2). Cette équation lie le facteur de charge aux variables d'état de la dynamique longitudinale de l'avion et permet de l'exprimer ainsi comme une sortie du système.

$$N_z = \cos(\Theta) + n_z. \quad (5.1)$$

$$n_z \approx (U_e \dot{\alpha} - U_e q - l_x \dot{q}) / g. \quad (5.2)$$

On préfère donc effectuer un retour sur le facteur de charge plutôt que l'angle d'attaque pour des raisons liées aux capteurs. Un contrôle du facteur de charge présente en outre les deux avantages suivants :

- il permet au pilote de gérer avec précision la valeur des efforts qu'il subit pour les manœuvres à grand nombre de  $g$  ;
- en l'absence de force exercée sur le manche, le contrôle du facteur de charge assure un vol à altitude quasi constante.

## 5.2.2 Approximation du «Short Period»

### 5.2.2.1 Représentation d'état

En analysant la représentation d'état de la dynamique longitudinale (3.39)-(3.43) pour des déplacements longitudinaux du centre de gravité<sup>2</sup>, on obtient que la dynamique d'évolution de l'angle d'attaque  $\alpha$  et de la vitesse de rotation en tangage  $q$  est régie par :

$$\begin{cases} (U_e - Z_{\dot{\alpha}}) \dot{\alpha}_x - \Delta x \cos(\alpha_e) \dot{q} = (Z_u + Z_{T_u}) u + Z_{\alpha} \alpha + (U_e + Z_q) q + Z_{\delta_e} \delta_e \\ -M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_x + (1 - m \Delta x^2 / I_y) \dot{q} = (M_u + M_{T_u}) u + M_{\alpha} \alpha + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e \end{cases}$$

---

2. Attention, dans ces formules les déplacements du centre de gravité sont exprimés dans le repère stabilité. Il faut donc se ramener à un déplacement longitudinal dans le repère avion via une rotation d'angle  $\alpha_e$  comme décrit en Annexe A.1.

La dynamique d'évolution de la vitesse  $u$  relève principalement du mode Phugoïde. Ce mode, au contraire du *Short Period*, constitue la réponse à long terme de l'avion. L'approximation dite du *Short Period* consiste alors à faire l'hypothèse que la dynamique d'évolution de la vitesse  $u$  est faible devant celle du *Short Period*. En d'autres termes, on suppose que la dynamique du mode *Short Period* s'établit à vitesse constante, ce qui revient à imposer  $u = 0$  dans le système d'équations précédent. Cela conduit, en ne considérant que l'entrée de la gouverne de profondeur, à la représentation d'état (5.3).

$$\begin{bmatrix} U_e - Z_{\dot{\alpha}} & -\Delta x \cos(\alpha_e) \\ -M_{\dot{\alpha}} & 1 - m\Delta x^2/I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & U_e + Z_q \\ M_{\alpha} & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e. \quad (5.3)$$

Le polynôme caractéristique de l'approximation *Short Period* est alors donné par :

$$\Delta_{sp} = \det(Es - A) = d_2 s^2 + d_1 s + d_0, \quad (5.4)$$

où :

$$\begin{cases} d_0 = M_q Z_{\alpha} - (U_e + Z_q) M_{\alpha} \\ d_1 = -(1 - m\Delta x^2/I_y) Z_{\alpha} - \Delta x \cos(\alpha_e) M_{\alpha} - (U_e - Z_{\dot{\alpha}}) M_q - (U_e + Z_q) M_{\dot{\alpha}} \\ d_2 = (1 - m\Delta x^2/I_y) (U_e - Z_{\dot{\alpha}}) - \Delta x \cos(\alpha_e) M_{\alpha} \end{cases} \quad (5.5)$$

Les fonctions de transfert reliant l'angle de la gouverne de profondeur à l'angle d'attaque et à la vitesse de rotation en tangage sont respectivement données par (5.6) et (5.7).

$$\frac{\alpha_x}{\delta_e} = \frac{N_{\alpha}}{\Delta_{sp}} = \frac{[(1 - m\Delta x^2/I_y) Z_{\delta_e} + \Delta x \cos(\alpha_e) M_{\delta_e}] s - M_q Z_{\delta_e} + (U_e + Z_q) M_{\delta_e}}{\Delta_{sp}}. \quad (5.6)$$

$$\frac{q}{\delta_e} = \frac{N_q}{\Delta_{sp}} = \frac{[M_{\dot{\alpha}} Z_{\delta_e} + (U_e - Z_{\dot{\alpha}}) M_{\delta_e}] s + M_{\alpha} Z_{\delta_e} - Z_{\alpha} M_{\delta_e}}{\Delta_{sp}}. \quad (5.7)$$

On en déduit via (5.2) la fonction de transfert reliant la gouverne de direction au facteur de charge :

$$\frac{n_z}{\delta_e} = \frac{N_{nz}}{\Delta_{sp}} = \frac{(n_2 s^2 + n_1 s + n_0)/g}{\Delta_{sp}}, \quad (5.8)$$

où :

$$\begin{cases} n_0 = -U_e M_{\alpha} Z_{\delta_e} + U_e Z_{\alpha} M_{\delta_e} \\ n_1 = -[(M_q + M_{\dot{\alpha}}) U_e + M_{\alpha} l_x] Z_{\delta_e} + [(Z_q + Z_{\dot{\alpha}}) U_e + Z_{\alpha} l_x] M_{\delta_e} \\ n_2 = [(1 - m\Delta x^2/I_y) U_e - M_{\dot{\alpha}} l_x] Z_{\delta_e} + [\Delta x \cos(\alpha_e) U_e - (U_e - Z_{\dot{\alpha}}) l_x] M_{\delta_e} \end{cases} \quad (5.9)$$

### 5.2.2.2 Validation

On se propose de valider en trois temps l'approximation du *Short Period* en comparant à la dynamique longitudinale :

1. les pôles du mode *Short Period* ;
2. le comportement fréquentiel ;
3. le résultat de l'implémentation d'une loi de contrôle.

Les validations sont effectuées pour la condition de vol particulière ( $V_T = 0.6 \text{ M}$ ,  $h = 1000 \text{ m}$ ), mais sont de manière générale valables pour l'ensemble des conditions de vol admissibles.

Les pôles du mode *Short Period* sont comparés avec ceux de l'approximation *Short Period* dans le Tableau 5.1. Cette comparaison montre qu'il n'y a pas de différence notable au niveau du placement de pôle à travailler avec la dynamique longitudinale ou avec l'approximation du *Short Period*.

Tableau 5.1 Comparaisons des pôles du mode *Short Period* avec leur approximation

$\Delta x$	Exact	Approximation
$-14.5\% \text{ mac} = -50 \text{ cm}$	$-5.0932 \text{ et } 3.4563$	$-5.0935 \text{ et } 3.4564$
$-8.70\% \text{ mac} = -30 \text{ cm}$	$-4.3608 \text{ et } 2.3234$	$-4.36126 \text{ et } 2.3233$
$-5.80\% \text{ mac} = -20 \text{ cm}$	$-3.9138 \text{ et } 1.6735$	$-3.9142 \text{ et } 1.6729$
$-4.35\% \text{ mac} = -15 \text{ cm}$	$-3.6528 \text{ et } 1.3101$	$-3.6533 \text{ et } 1.3089$
$-2.90\% \text{ mac} = -10 \text{ cm}$	$-3.3513 \text{ et } 0.9062$	$-3.3519 \text{ et } 0.9033$
$-1.45\% \text{ mac} = -5 \text{ cm}$	$-2.9834 \text{ et } 0.4438$	$-2.9840 \text{ et } 0.4299$
$0\% \text{ mac} = 0 \text{ cm}$	$-2.4762 \text{ et } 0.0836$	$-2.4771 \text{ et } -0.1842$
$1.45\% \text{ mac} = 5 \text{ cm}$	$-1.3834 \pm 0.5250i$	$-1.3850 \pm 0.5237i$
$2.90\% \text{ mac} = 10 \text{ cm}$	$-1.4401 \pm 1.3630i$	$-1.4404 \pm 1.3618i$
$4.35\% \text{ mac} = 15 \text{ cm}$	$-1.4968 \pm 1.8528i$	$-1.4969 \pm 1.8519i$
$5.80\% \text{ mac} = 20 \text{ cm}$	$-1.5545 \pm 2.2371i$	$-1.5545 \pm 2.2364i$
$8.70\% \text{ mac} = 30 \text{ cm}$	$-1.6738 \pm 2.8546i$	$-1.6738 \pm 2.8541i$
$14.5\% \text{ mac} = 50 \text{ cm}$	$-1.9320 \pm 3.8095i$	$-1.9320 \pm 3.8091i$

On vérifie dans ce paragraphe le bon comportement de l'approximation du *Short Period* au niveau fréquentiel. Pour cela, on considère le système dont l'entrée est la gouverne de profondeur et dont les deux sorties sont le facteur de charge  $n_z$  (5.8) et la vitesse de tangage  $q$  (5.7). Les diagrammes de Bode associés sont tracés sur la Figure 5.2 et la Figure 5.3 pour deux positions du centre de gravité de l'avion. La première configuration présente un Phugocyte naturellement instable alors qu'il est stable pour la seconde.

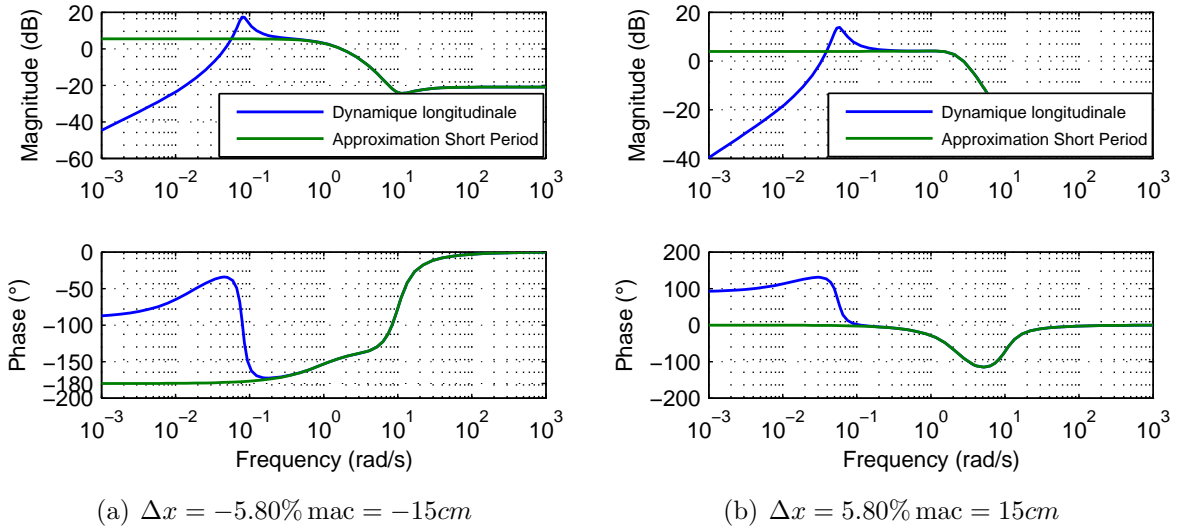


Figure 5.2 Comparaison des diagrammes de Bode de la sortie  $N_z$  entre dynamique longitudinale et approximation *Short Period*

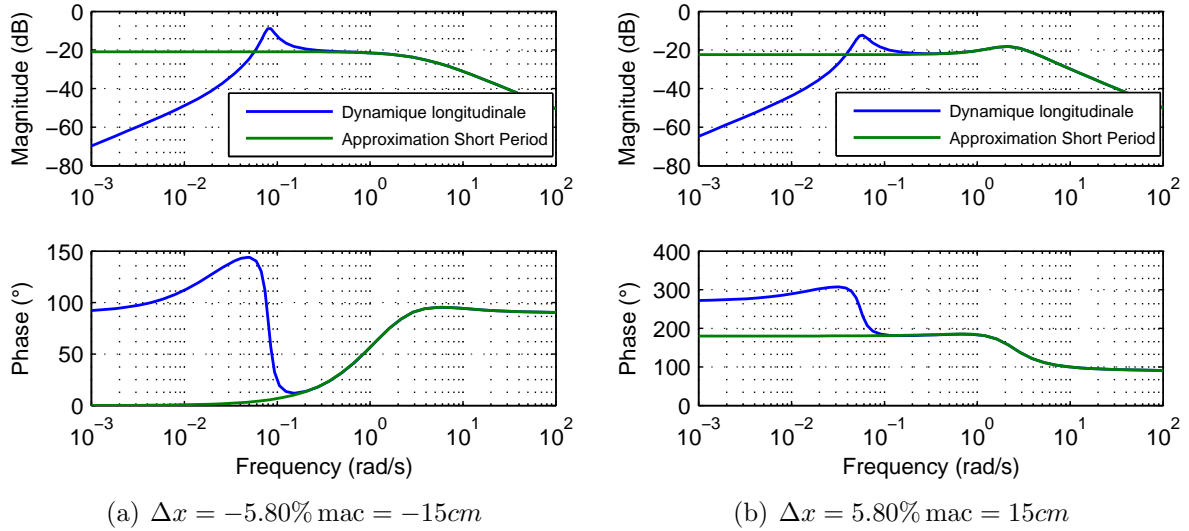


Figure 5.3 Comparaison des diagrammes de Bode de la sortie  $q$  entre dynamique longitudinale et approximation *Short Period*

L'approximation du *Short Period* suit parfaitement le comportement de la dynamique longitudinale pour les fréquences au-delà de 0.1 Hz. L'approximation du *Short Period* est donc tout à fait valable pour traiter le comportement du système dans la plage de fréquence d'influence du mode *Short Period*, à savoir les moyennes et hautes fréquences. Ce résultat n'est plus valable lorsque l'on rentre dans le domaine des très basses fréquences dans lequel le mode Phugoïde devient prépondérant.



La dernière étape de la validation consiste à vérifier qu'un contrôleur synthétisé avec l'approximation du *Short Period* peut être transposé avec succès sur le modèle complet de la dynamique longitudinale. Pour cela, l'architecture de contrôle présentée ultérieurement à la Section 5.4 est considérée et un design est effectué de manière à obtenir un temps de réponse du facteur de charge inférieur à 3.0 s. Le contrôleur est alors implémenté sur les deux modèles, et les réponses en  $N_z$  et  $q$  suite à une entrée de type échelon en commande du facteur de charge sont tracées à la Figure 5.4.

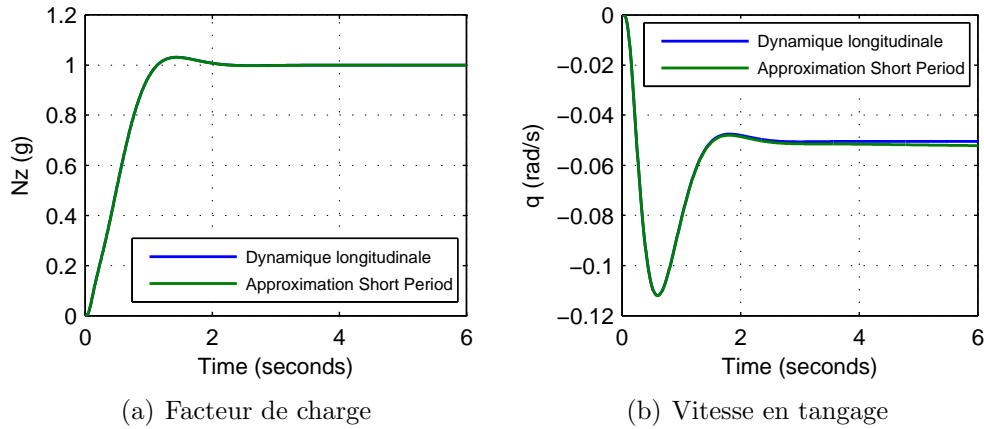


Figure 5.4 Comparaison de l'implémentation d'un contrôleur entre dynamique longitudinale et approximation *Short Period*

Les réponses temporelles sont sensiblement identiques aussi bien au niveau du facteur de charge que de la vitesse en tangage. Il est à noter que le résultat est ici présenté pour un centre de gravité placé nominalement. Dans cette configuration, le système en boucle fermée est instable en l'absence de boucle de guidage. Cependant, le pôle instable du Phugoïde étant très lent (dans cet exemple il est placé en  $3.91 \times 10^{-6}$ ), il ne vient pas perturber la réponse à court terme du facteur de charge. Ce résultat ouvre donc la possibilité d'effectuer la synthèse du contrôleur avec l'approximation du *Short Period*.

### 5.3 Cahier des charges

La suite de ce mémoire est consacrée à la synthèse et à la validation d'un système de commandes assurant le contrôle du facteur de charge de manière robuste vis-à-vis des variations de masse et de centrage. On définit ici le cahier des charges que doit vérifier le système en boucle fermée en se basant sur les caractéristiques physiques du F-16 (Nguyen *et al.* (1979)), ainsi que les spécifications usuellement requises par les avionneurs (Stevens et Lewis (2003))

et les autorités de certification (US DEPARTEMENT OF DEFENCE (1990, 1997)). On suppose que les sorties du système sont le facteur de charge  $N_z$  et la vitesse en tangage  $q$ .

- **Enveloppe de vol**

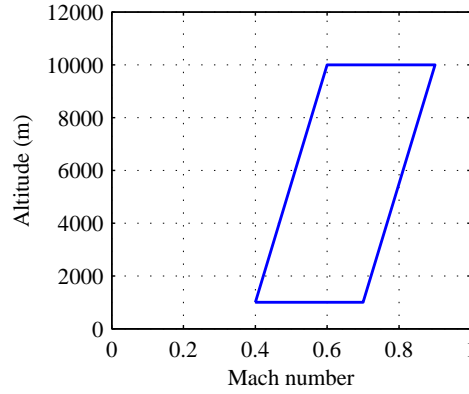


Figure 5.5 Enveloppe de vol  $\Theta$

L'enveloppe de vol  $\Theta$  est définie sur la Figure 5.5. Les performances décrites ci-dessous doivent être assurées sur l'intégralité de l'enveloppe de vol pour un vol de type croisière.

- **Variation des paramètres de masse**

On considère le domaine de variation des paramètres de masse suivant :

$$\Delta = \{(m_0 + \Delta m, \Delta x), |\Delta m| \leq 1000 \text{ kg}, |\Delta x| \leq 0.0435\bar{c} = 15 \text{ cm}\}, \quad (5.10)$$

où  $m_0 = 9300 \text{ kg}$  est la masse de référence de l'avion et où les 4.35% mac ont été choisis de manière à couvrir la plage de variation admissible du centre de gravité du F-16. Les performances décrites ci-dessous doivent être vérifiées sur l'ensemble du domaine incertain  $\Delta$ .

- **Stabilité**

Le système en boucle fermée doit être stable en tout point de l'enveloppe de vol et pour toute configuration de masse et de centrage du domaine incertain  $\Delta$ .

- **Facteur de charge**

La réponse temporelle du facteur de charge à une commande de type échelon doit présenter les caractéristiques suivantes :

1. erreur nulle en régime permanent ;

2. dépassement inférieur à 10% ;
3. temps de réponse inférieur à 3 s.

On tolère un temps de réponse légèrement supérieur à basses vitesses.

- **Vitesse en tangage**

Dans la mesure où l'on travaille sur un avion de combat, on tolère un dépassement en  $q$  pouvant atteindre les 100% pour une entrée de commande du facteur de charge.

- **Rejet du bruit capteur**

Le système doit permettre de rejeter autant que possible le bruit introduit par les capteurs mesurant  $N_z$  et  $q$ .

- **Marges de stabilité**

Le système doit présenter au niveau de l'entrée de l'actionneur de la gouverne de profondeur une marge de gain  $GM \geq 13\text{dB}$  ou  $GM \leq -5\text{dB}$  et une marge de phase  $|PM| \geq 40^\circ$ .

- **Qualités de vol et de manœuvrabilité**

Les qualités de vol et de manœuvrabilité s'expriment comme un ensemble de critères temporels, fréquentiels et modaux, prenant la forme de contraintes que la dynamique d'un avion doit satisfaire de manière à assurer un pilotage aisé de l'appareil. Ces contraintes diffèrent suivant le type d'avion : normes militaires (US DEPARTMENT OF DEFENCE (1990, 1997)) ou normes civiles (FAA (1974); JAA (1974)). Dans le cadre du contrôle du mode *Short Period*, les normes militaires imposent pour un vol en croisière un amortissement  $\xi_{sp}$  supérieur à 0.30.

- **Gouverne de profondeur**

Éviter les saturations aussi bien en débattement ( $\pm 25^\circ$ ) qu'en vitesse ( $\pm 60^\circ/\text{s}$ ).

## 5.4 Stratégie de contrôle

### 5.4.1 Architecture du contrôleur

L'architecture choisie pour le contrôleur est inspirée de (Stevens et Lewis (2003)) et de (Gahinet et Apkarian (2011b)). Dans ce dernier article, l'architecture du contrôleur (Fig. 5.6) présente les composantes suivantes :

- un retour proportionnel sur l'erreur  $e^3$  de gain  $K_p$  ;

---

3. Erreur entre la commande  $N_{zc}$  et le facteur de charge en sortie du système  $N_z$ .

- un retour pseudo intégral  $1/(s + \varepsilon)$  sur l'erreur  $e$  de gain  $K_i$  ;
- un retour proportionnel sur la vitesse en roulis  $q$  de gain  $K_q$  ;
- une action directe (*feedforward* en anglais) de la commande  $N_{zc}$  de gain  $K_f$  ;
- un filtre  $F_{\text{roll}}$  d'ordre 2 de type *Roll-off* en entrée de l'actionneur de la gouverne de direction :

$$F_{\text{roll}} = \frac{\omega_n^2}{\Delta F_{\text{roll}}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}. \quad (5.11)$$

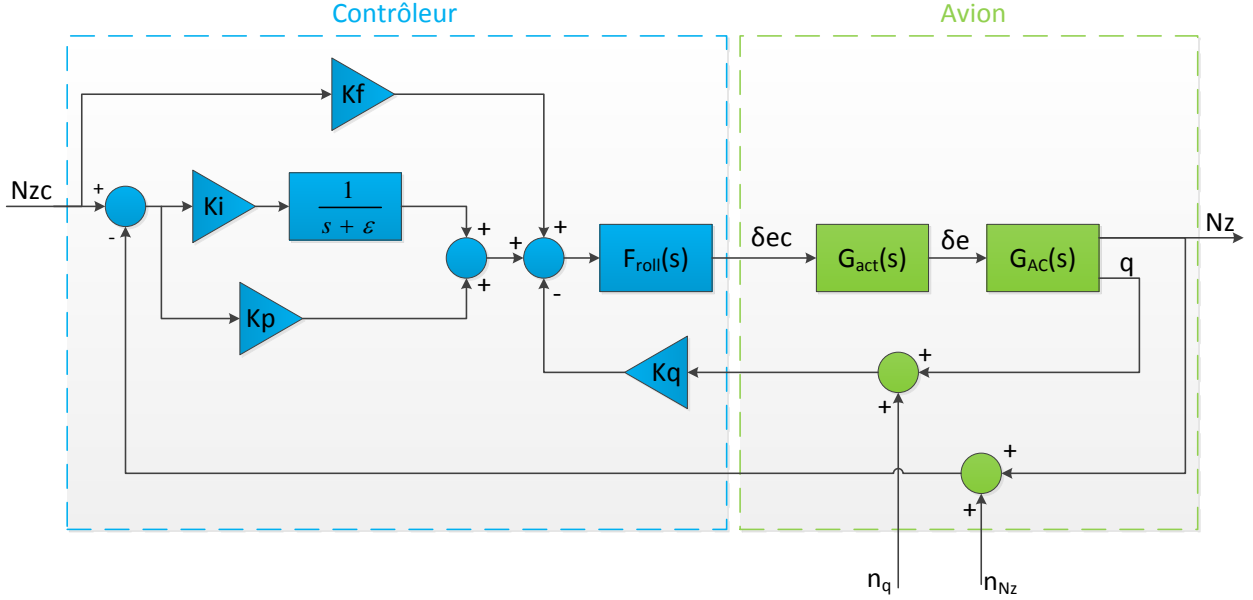


Figure 5.6 Architecture classique pour le contrôle du facteur de charge

Le retour sur  $q$  est utilisé pour améliorer l'amortissement du système. L'action directe permet de venir faire un placement de zéro pour contrôler le dépassement de la réponse temporelle. Le filtre *Roll-off* est un filtre passe-bas dont la fonction est de filtrer le bruit et d'empêcher que des signaux hautes fréquences viennent endommager l'actionneur. L'introduction d'un retour pseudo intégral est quant à lui justifié par le fait que le contrôle du *Short Period* se fait à court terme. Il est en effet illusoire de conserver sur le long terme une accélération donnée sans contrôle en vitesse.

Cette architecture présente le désavantage d'introduire un zéro au niveau de la réponse du facteur de charge en  $z = -K_i/(K_f + K_p) - \varepsilon$ . Avec la méthode utilisée dans la phase de synthèse, le réglage des gains  $K_i$ ,  $K_f$  et  $K_p$  rend ce zéro instable dans la majorité des cas. Cela a pour conséquence d'introduire un dépassement initial non désiré sur la réponse temporelle

du facteur de charge. L'architecture du contrôleur a été modifiée de manière à conserver le niveau de performance obtenu avec la précédente architecture mais en s'affranchissant du zéro instable. La solution choisie est décrite à la Figure 5.7.

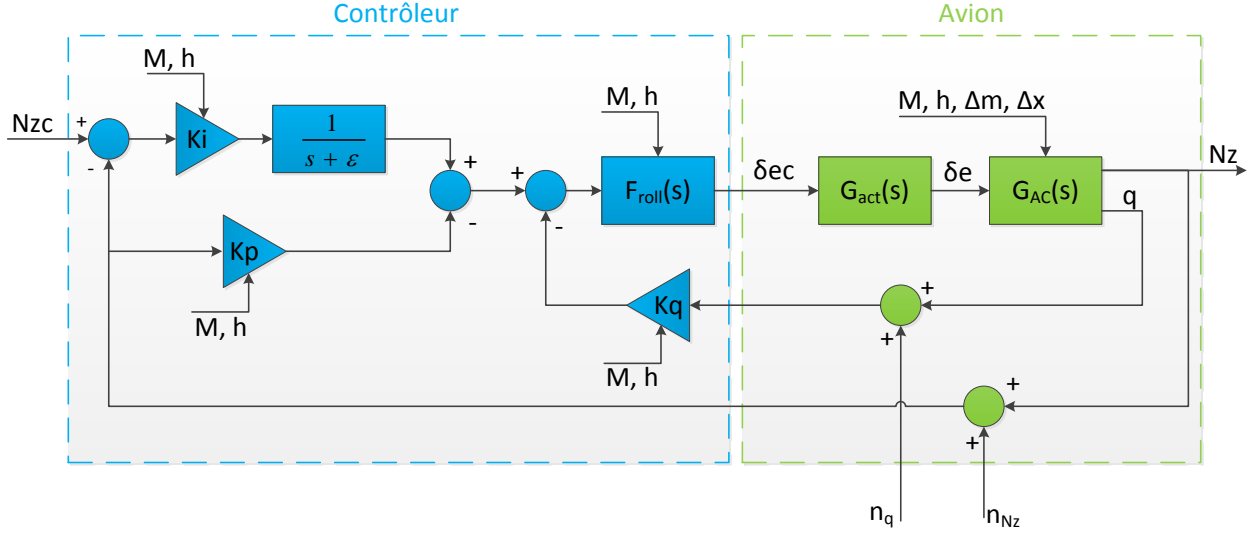


Figure 5.7 Architecture du contrôleur

Dans cette configuration, le modèle de l'avion dépend à la fois du point de vol considéré et des incertitudes du système. Les gains du contrôleur sont quant à eux uniquement fonction du point de vol. Pour tout ce qui suit,  $\varepsilon = 0.001$ . La Figure 5.7 fait apparaître dans l'architecture les éléments supplémentaires suivants :

- une entrée de bruit  $n_{Nz}$  au niveau de la mesure du facteur de charge ;
  - une entrée de bruit  $n_q$  au niveau de la mesure de la vitesse en tangage ;
  - une fonction de transfert  $G_{act}$  modélisant la dynamique de la gouverne de profondeur.
- Dans le cas du F-16,  $G_{act}$  est un premier ordre de constante de temps  $\tau = 0.0495$  s.

#### 5.4.2 Fonctions de transfert en boucle fermée

Les fonctions de transfert nécessaires par la suite sont ici introduites :

- fonction de transfert liant l'entrée de commande du système  $N_{zc}$  à la sortie  $N_z$  :

$$T_{N_z} = \frac{N_z}{N_{zc}} = \frac{K_i N_{nz}}{[(1 + \tau s) \Delta F_{roll} \Delta_{sp} / \omega_n^2 + K_p N_{nz} + K_q N_q] (s + \varepsilon) + K_i N_{nz}} ; \quad (5.12)$$

- fonction de transfert liant l'entrée de commande du système  $N_{zc}$  à la sortie  $q$  :

$$T_q = \frac{q}{N_{zc}} = \frac{K_i N_q}{[(1 + \tau s) \Delta F_{\text{roll}} \Delta_{\text{sp}} / \omega_n^2 + K_p N_{nz} + K_q N_q] (s + \varepsilon) + K_i N_{nz}} ; \quad (5.13)$$

- fonction de transfert obtenue en ouvrant la boucle au niveau de  $\delta_{ec}$  entre l'entrée de l'actionneur et la sortie du *Roll-off* :

$$T_s = -\frac{K_i N_{nz} + (K_p N_{nz} + K_q N_q) (s + \varepsilon)}{(1 + \tau s) (s + \varepsilon) \Delta F_{\text{roll}} \Delta_{\text{sp}} / \omega_n^2} ; \quad (5.14)$$

- fonction de transfert entre l'entrée de bruit  $n_{Nz}$  et la commande de l'actionneur  $\delta_{ec}$  :

$$T_{n_{Nz}} = \frac{\delta_{ec}}{n_{Nz}} = -\frac{(1 + \tau s) (K_i + K_p (s + \varepsilon)) \Delta_{\text{sp}}}{[(1 + \tau s) \Delta F_{\text{roll}} \Delta_{\text{sp}} / \omega_n^2 + K_p N_{nz} + K_q N_q] (s + \varepsilon) + K_i N_{nz}} ; \quad (5.15)$$

- fonction de transfert entre l'entrée de bruit  $n_q$  et la commande de l'actionneur  $\delta_{ec}$  :

$$T_{n_q} = \frac{\delta_{ec}}{n_q} = -\frac{(1 + \tau s) (s + \varepsilon) K_q \Delta_{\text{sp}}}{[(1 + \tau s) \Delta F_{\text{roll}} \Delta_{\text{sp}} / \omega_n^2 + K_p N_{nz} + K_q N_q] (s + \varepsilon) + K_i N_{nz}} ; \quad (5.16)$$

- fonction de transfert entre les entrées de bruit  $n_{Nz}$  et  $n_q$  et la commande de l'actionneur  $\delta_{ec}$  :

$$T_n = [T_{n_{Nz}}, T_{n_q}] . \quad (5.17)$$

### 5.4.3 Représentation d'état du système en boucle fermée

Nous aurons finalement besoin à des fins d'analyse de stabilité et de performance de la représentation d'état du système en boucle fermée. On présente dans un premier temps les représentations d'état de la dynamique de l'avion (*Short Period* et gouverne de profondeur) et du contrôleur. Ces deux représentations d'état vont servir à définir une représentation d'état du système en boucle fermée. La représentation d'état du mode *Short Period* (5.3) après intégration de la dynamique de la gouverne de profondeur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_{\text{AC}} = A_{\text{AC}} X_{\text{AC}} + B_{\text{AC}} \delta_{ec} \\ Y_{\text{AC}} = C_{\text{AC}} X_{\text{AC}} \end{cases} ,$$

où :

$$X_{\text{AC}} = \begin{bmatrix} \alpha_x & q & \delta_e \end{bmatrix}^\top , \quad Y_{\text{AC}} = \begin{bmatrix} N_z & q \end{bmatrix}^\top ,$$

$$A_{AC} = \begin{bmatrix} U_e - Z_{\dot{\alpha}} & -\Delta x \cos(\alpha_e) & 0 \\ -M_{\dot{\alpha}} & 1 - m\Delta x^2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & U_e + Z_q & Z_{\delta_e} \\ M_{\alpha} & M_q & M_{\delta_e} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AC,11} & A_{AC,12} & A_{AC,13} \\ A_{AC,21} & A_{AC,22} & A_{AC,23} \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix},$$

$$B_{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix}, \quad C_{AC} = \begin{bmatrix} C_{AC,N_z} \\ C_{AC,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U_e A_{AC,11} - l_x A_{AC,21})/g & 0 \\ (U_e A_{AC,12} - l_x A_{AC,22} - U_e)/g & 1 \\ (U_e A_{AC,13} - l_x A_{AC,23})/g & 0 \end{bmatrix}^{\top}.$$

Une représentation d'état du contrôleur est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}_K = A_K X_K + B_K U_K \\ \delta_{ec} = C_K X_K \end{cases},$$

où :

$$X_K \in \mathbb{R}^3, \quad U_K = \begin{bmatrix} N_{zc} & N_z & q \end{bmatrix}^{\top},$$

$$A_K = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \omega_n^2 & -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix},$$

$$B_K = \begin{bmatrix} B_{K,N_{zc}} & B_{K,N_z} & B_{K,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i & -K_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_p\omega_n^2 & -K_q\omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad C_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On établit finalement une représentation d'état du système en boucle fermée pour l'entrée de commande  $N_{zc}$  et pour la sortie  $N_z$ . Cette représentation sera utile dans le cadre des analyses de stabilité et de performances robustes du Chapitre 8.

$$\begin{cases} \dot{X}_{CL} = A_{CL} X_{CL} + B_{CL} N_{zc} \\ N_z = C_{CL} X_{CL} \end{cases}, \quad (5.18)$$

où :

$$X_{CL} = \begin{bmatrix} X_{AC} \\ X_K \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} A_{AC} & B_{AC} C_K \\ B_{K,N_z} C_{AC,N_z} + B_{K,q} C_{AC,q} & A_K \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$B_{CL} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{K,N_{zc}} \end{bmatrix}, \quad C_{CL} = \begin{bmatrix} C_{AC,N_z} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

## CHAPITRE 6

### DE LA SYNTHÈSE $H_\infty$ AU DESIGN DE CONTRÔLEURS ROBUSTES ET AUTOSÉQUENCÉS

Ce chapitre est consacré à la présentation théorique des outils utilisés dans ce mémoire pour effectuer la synthèse des contrôleurs. La Section 6.1 est l'occasion de brefs rappels sur la méthode  $H_\infty$  classique. La Section 6.2 introduit les méthodes  $H_\infty$  structurées. Ces dernières, au contraire des méthodes  $H_\infty$  classiques, permettent de fixer *a priori* la structure du contrôleur pour laquelle on souhaite minimiser des contraintes  $H_\infty$ . La Section 6.3, après une brève introduction à la synthèse LPV, tire profit des avantages des méthodes  $H_\infty$  structurées pour mettre en place une procédure visant à élaborer des contrôleurs robustes et autoséquencés.

#### 6.1 Formulation et résolution classique du problème $H_\infty$

Cette sous-section est consacrée à de brefs rappels concernant la synthèse  $H_\infty$ .

##### 6.1.1 Forme standard

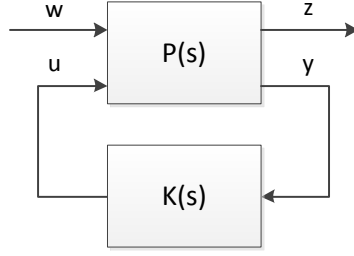


Figure 6.1 Forme standard

La synthèse  $H_\infty$  repose sur le formalisme dit de la forme standard. Ce formalisme permet de représenter à la fois le système à contrôler et le cahier des charges, ce dernier étant exprimé via l'introduction de filtres de pondération. Le système augmenté  $P(s)$  ainsi obtenu relie les deux entrées que sont la commande du système  $u$  et les entrées exogènes  $w$  (consignes et/ou perturbations) aux deux sorties que sont les mesures  $y$  et les sorties régulées  $z$  (Fig. 6.1).  $P(s)$  est décomposé de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} Z(z) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(z) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(z) \\ U(s) \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$



Figure 6.2 Problème  $H_\infty$  standard

La mise en place d'un contrôleur rebouclant la sortie  $y$  sur l'entrée de commande  $u$  via la relation  $U(s) = K(s)Y(s)$  est représentée à la Figure 6.2. La fonction de transfert reliant les entrées exogènes  $w$  aux sorties régulées  $z$  est alors donnée sous la forme d'une LFT inférieure :

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Problème $H_\infty$

Initié par Zames (1981) puis développé par Doyle (1982), le problème de synthèse  $H_\infty$  est un problème de stabilisation et de rejet de perturbations. Plus particulièrement, il s'agit de trouver un contrôleur stabilisant internement le système et minimisant l'impact des perturbations  $w$  sur les sorties régulées  $z$ . Cela se traduit mathématiquement par la recherche d'un contrôleur stabilisant qui minimise la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert  $T_{zw}(P, K)$  :

$$\|T_{zw}(P, K)\|_\infty := \sup_{w \in L^2 \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)), \quad (6.3)$$

où  $\bar{\sigma}(A)$  est la plus grande valeur singulière de la matrice  $A$  et où la norme  $\mathbf{L}_2$  est définie par :

$$\|v\|_2^2 = \int_0^{+\infty} v(t)^\top v(t) dt.$$

On cherche de cette manière à minimiser la valeur maximale de l'énergie de la sortie sur une entrée d'énergie finie.

- **Problème  $H_\infty$  optimal**

Trouver un contrôleur  $K(s)$  stabilisant le système et minimisant  $\|T_{zw}(P, K)\|_\infty$ . La norme  $H_\infty$  optimale est alors notée  $\gamma_{\text{opt}}$ .

Connaître le gain optimal  $\gamma_{\text{opt}}$  peut être utile pour mesurer les limites des performances

atteignables. En pratique, on s'intéresse néanmoins à résoudre le problème de manière sous-optimale.

- **Problème  $H_\infty$  sous-optimal**

Trouver un contrôleur  $K(s)$  stabilisant le système et tel que  $\|T_{zw}(P, K)\|_\infty < \gamma$  avec  $\gamma > \gamma_{opt}$ .

### 6.1.3 Résolution classique du problème $H_\infty$

De nombreuses méthodes existent pour résoudre le problème  $H_\infty$  dans sa forme classique. La méthode qui semble à l'heure actuelle la plus adaptée numériquement a été proposée par Doyle *et al.* (1989). Cette méthode est basée sur le formalisme de la représentation d'état et n'est possible que dans le cadre de 5 hypothèses. Ces dernières portent sur les matrices de la représentation d'état à travers des relations algébriques, des conditions de rang, de détectabilité et de stabilisabilité. Des méthodes moins restrictives au niveau de ces hypothèses ont été développées, notamment via la considération d'approches de type *Linear Matrix Inequality* (LMI) (Gahinet et Apkarian (1994)). La caractérisation LMI du problème  $H_\infty$  conduit néanmoins à un effort numérique plus important.

### 6.1.4 Limitations des approches $H_\infty$ classiques

Les méthodes  $H_\infty$  classiques, en dépit de nombreuses qualités, présentent quelques inconvénients limitant leur mise en place pratique. Premièrement, ces méthodes ne permettent pas de maîtriser l'ordre du contrôleur, ce dernier étant au moins aussi élevé que l'ordre du système augmenté. Dans le cadre d'applications temps réel, il est alors souvent indispensable d'avoir recours à une réduction de l'ordre du contrôleur, altérant ainsi ses performances. Deuxièmement, dans ce type de synthèse, aucune architecture particulière n'émerge du contrôleur. Dès lors, toute interprétation physique est rendue très difficile, compliquant l'éventuel travail d'ajustement manuel des gains une fois le contrôleur implémenté.

## 6.2 Approche $H_\infty$ structurée

Dans le but de s'affranchir des limitations rencontrées par les méthodes  $H_\infty$  classiques, des méthodes ont été développées afin de fixer *a priori* la structure du contrôleur. L'extension des méthodes  $H_\infty$  classiques au problème de synthèse d'un contrôleur à architecture fixe conduit généralement à des approches de type *Bilinear Matrix Inequality* (BMI) (Safonov *et al.* (1994)) afin de résoudre un problème non convexe bien plus complexe que le problème  $H_\infty$  originel. Cette complexité accrue conduit à développer des techniques minimisant des contraintes  $H_\infty$

en ajustant directement les gains du contrôleur dont l'architecture est définie *a priori*. Parmi les contributions les plus notables dans ce domaine, mentionnons la *toolbox* HIFOO (Burke *et al.* (2006)) ainsi que la fonction `hinfstruct` intégrée dans la *Robust Control Toolbox* de MATLAB (Gahinet et Apkarian (2011a)). Ces méthodes, dites  $H_\infty$  structurées, sont basées sur des méthodes d'optimisation non lisse (Apkarian et Noll (2006, 2007)) venant ajuster de manière itérative les gains du contrôleur afin de stabiliser internement le système en boucle fermée et de minimiser des contraintes  $H_\infty$ .

### 6.2.1 Problème $H_\infty$ structuré

Considérons une famille de contrôleurs  $(K(s, \rho))_{\rho \in \varrho}$  paramétrisée par le vecteur  $\rho \in \varrho$ , où  $\varrho$  désigne l'espace des paramètres ajustables. On donne ci-dessous quelques exemples d'une telle famille pour des contrôleurs *Single-Input Single-Output* (SISO). Ces exemples s'étendent aisément au cas des contrôleurs *Multi-Input Multi-Output* (MIMO).

- Contrôleur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) :

$$K(s, \rho) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad \rho = (K_p, K_i, K_d) \in \mathbb{R}^3.$$

- Fonction de transfert stable d'ordre 2 :

$$K(s, \rho) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \rho = (\xi, \omega_n) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+.$$

- Contrôleur SISO quelconque :

$$K(s, \varrho) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad \rho = (a_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+n+1}.$$

Le problème  $H_\infty$  structuré est alors le suivant :

*Étant donné une famille de contrôleurs  $(K(s, \rho))_{\rho \in \varrho}$ , trouver un vecteur de paramètre  $\rho^* \in \varrho$  tel que  $K(\rho^*)$  stabilise internement le système et minimise la norme infinie de la fonction de transfert  $T_{zw}$  :*

$$\|T_{zw}(P, K(\rho^*))\|_\infty = \gamma_{\text{opt}} := \min_{\rho \in \varrho} \|T_{zw}(P, K(\rho))\|_\infty. \quad (6.4)$$

En pratique, on ne cherche pas à atteindre  $\gamma_{\text{opt}}$ , mais à trouver un vecteur de paramètres  $\rho$  tel que  $\gamma_{\text{opt}} \leq \|T_{zw}(P, K(\rho))\|_\infty \leq \gamma_{\text{opt}} + \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  le plus petit possible.

### 6.2.2 Fonction MATLAB `hinfstruct`

La méthode retenue dans le cadre de ce mémoire est la fonction implémentée dans MATLAB `hinfstruct`. Cette fonction permet de résoudre via une procédure itérative le problème  $H_\infty$  structuré de manière locale. Les avantages et inconvénients de cette fonction, ainsi que son principe de fonctionnement sont présentés dans cette sous-section.

#### 6.2.2.1 Avantages

Les contraintes formulées dans le cahier des charges telles que les objectifs de poursuite, les marges de stabilité et le rejet du bruit de mesure peuvent être formulées sous la forme de contraintes  $H_\infty$  du type :

$$\|WT\|_\infty < 1,$$

où  $T$  représente la fonction de transfert considérée et où  $W$  est la fonction de pondération visant à spécifier la contrainte. Dans le cas où de multiples critères de performances doivent être rencontrés, cette procédure amène à trouver un contrôleur vérifiant l'ensemble des contraintes suivantes :

$$\|W_i T_i\|_\infty < 1, \quad i = 1, \dots, m.$$

On présente ci-dessous deux avantages de la fonction `hinfstruct` vis-à-vis des méthodes  $H_\infty$  classiques.

**Résolution optimale du problème** Dans le cas de l'approche  $H_\infty$  classique, l'objectif est de minimiser la norme  $H_\infty$  de la matrice de transfert globale  $T_{zw}(P, K)$ . Cette approche peut mener à des solutions sous-optimales dans le cas de figure où aucune contrainte ne porte sur certaines fonctions de transfert scalaires de la matrice  $T_{zw}(P, K)$ . Pour illustrer cela, considérons le système augmenté  $P$  présentant deux entrées homogènes scalaires  $w_1$  et  $w_2$  et deux sorties régulées scalaires  $z_1$  et  $z_2$ . En notant  $w = (w_1, w_2)$  et  $z = (z_1, z_2)$ ,  $T_{zw}(P, K)$  se décompose alors de la façon suivante :

$$T_{zw}(P, K) = \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 w_2} \\ T_{z_2 w_1} & T_{z_2 w_2} \end{bmatrix}.$$

Supposons que l'on souhaite minimiser la norme  $H_\infty$  des deux fonctions de transfert  $T_{z_1 w_1}$  et  $T_{z_2 w_2}$ . Les méthodes  $H_\infty$  classiques vont chercher à minimiser la matrice de transfert globale du système augmenté  $T_{zw}$ . Cela a pour conséquence de minimiser les deux fonctions de transfert souhaitées  $T_{z_1 w_1}$  et  $T_{z_2 w_2}$ , mais également les deux fonctions de transfert  $T_{z_1 w_2}$  et

$T_{z_2 w_1}$ , alors qu'aucune contrainte ne leur est imposée par le cahier des charges.

La fonction `hinfstruct` permet de s'affranchir de cette restriction en ne considérant que les fonctions de transfert que l'on souhaite effectivement minimiser. Pour cela, les contraintes sont concaténées dans la contrainte généralisée :

$$\|H(s)\|_\infty < 1,$$

où

$$H(s) = \text{diag} [W_1 T_1, \dots, W_m T_m].$$

La fonction `hinfstruct` permet alors de directement minimiser la contrainte généralisée  $H$  et non pas la matrice de transfert globale  $T_{zw}$ .

**Synthèse multimodèle** Une des caractéristiques importantes de la fonction `hinfstruct` concerne sa capacité à gérer la synthèse multimodèle. Classiquement, un contrôleur est élaboré relativement à un unique modèle de référence. *A contrario*, la synthèse dite multimodèle permet de considérer plusieurs modèles à la fois dans la synthèse d'un unique contrôleur.

Considérons par exemple le cas de figure où les fonctions de transfert  $H_i = T_i W_i$  ne sont pas reliées à un unique système  $P$  mais à de multiples systèmes  $P_1, \dots, P_n$ . Chaque fonction de transfert  $H_i = T_i W_i$  peut être mise sous la forme standard  $H_i = \mathcal{F}_l(P_j, K)$ . La contrainte généralisée peut alors être réécrite sous la forme :

$$H = \mathcal{F}_l(P, \text{diag}[K, \dots, K]),$$

où  $P$  se déduit de  $[P_1, \dots, P_n]$  via une permutation des entrées et des sorties. Ce résultat montre que la considération de multiples systèmes conduit simplement à répéter le contrôleur  $K$  plusieurs fois dans l'écriture de la contrainte généralisée sous sa forme standard. Les méthodes  $H_\infty$  classiques ne gèrent pas ce type d'approche, au contraire de la méthode de synthèse  $H_\infty$  structurée `hinfstruct` ((Gahinet et Apkarian, 2011a,b)).

### 6.2.2.2 Limitations

Au contraire des méthodes  $H_\infty$  classiques, les méthodes de type  $H_\infty$  structurée n'offrent aucune garantie quant à la stabilisation du système en boucle fermée. Cette non garantie est la conséquence directe du choix *a priori* de l'architecture du contrôleur. En effet, il sera

vain de tenter de stabiliser le système en boucle fermée avec une méthode  $H_\infty$  structurée si l'architecture du contrôleur ne le permet pas de manière intrinsèque. Une connaissance préalable du système à contrôler, ainsi que d'architectures de contrôle classiques permettant de le stabiliser est donc indispensable.

Le problème de minimisation à architecture fixe étant non convexe, l'initialisation de la méthode peut revêtir dans certains cas de figure une importance toute particulière. En effet, une mauvaise initialisation peut conduire ces méthodes à ne pas trouver de solution stabilisant le système, alors qu'une condition initiale mieux choisie le permettrait. Une première approche consiste à mettre en œuvre la synthèse pour des conditions initiales tirées aléatoirement. Une seconde approche possible est d'effectuer une première synthèse en trouvant manuellement des gains permettant de stabiliser le système. Ces gains peuvent alors être utilisés comme condition initiale de la fonction `hinfstruct` qui se chargera de les optimiser pour satisfaire au mieux les contraintes.

### 6.2.2.3 Principe de fonctionnement

Le problème de synthèse  $H_\infty$  structurée peut se formaliser mathématiquement de la façon suivante :

*Étant donné une fonction  $F : \mathbb{R}^n \times [0, \infty] \rightarrow \mathcal{H}^m$  de classe  $C^2$ , où l'on rappelle que  $\mathcal{H}^m$  représente l'espace des matrices hermitiennes de taille  $m$ , posons :*

$$f(x) = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \lambda_1(F(x, \omega)),$$

*où  $\lambda_1 : \mathcal{H}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dénote la plus grande valeur propre. On cherche alors à résoudre :*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \quad (6.5)$$

Ce problème englobe le problème de synthèse  $H_\infty$  structurée de la façon suivante. En prenant :

$$F(x, \omega) = \mathcal{F}_l(M, K(x))(j\omega)^* \mathcal{F}_l(M, K(x))(j\omega),$$

on obtient directement :

$$f(x) = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(\mathcal{F}_l(M, K(x))(j\omega)) = \|\mathcal{F}_l(M, K(x))\|_\infty.$$

La synthèse  $H_\infty$  structurée se résume donc en un problème de type min-max. Ce problème

relève de l'analyse non lisse dans le sens où les fonctions min et max ne permettent pas de conserver les propriétés de dérivabilité des fonctions. Pour s'en convaincre, supposons que l'on souhaite résoudre en dimension 1 le problème (6.5) pour la fonction de classe  $C^\infty$  :

$$F(x, \omega) = \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2}\right) f_1(x) + \frac{1}{1 + \omega^2} f_2(x),$$

où

$$f_1(x) = 5 - \frac{4}{1 + (x - 2)^2}, \quad f_2(x) = 5 - \frac{4}{1 + (x + 2)^2}.$$

Il est alors aisé de montrer que :

$$f(x) = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \lambda_1(F(x, \omega)) = \max(f_1(x), f_2(x)). \quad (6.6)$$

Les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f$  ainsi obtenues sont tracées à la Figure 6.3. On observe que la fonction  $f$  n'est pas dérivable au point en lequel elle admet un minimum global. La solution du problème (6.5) ne peut donc pas être caractérisée par les valeurs annulant le gradient de la fonction  $f$ , ce dernier pouvant ne pas exister aux points d'intérêt, même quand la fonction  $F(x, \omega)$  est de classe  $C^\infty$ .

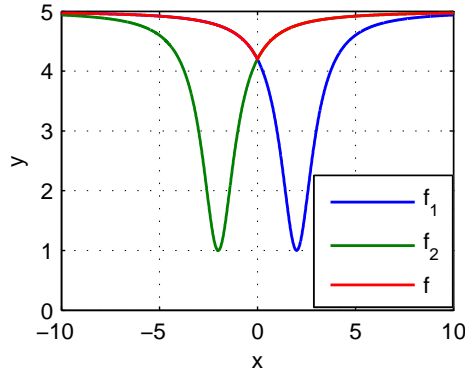


Figure 6.3 Illustration du caractère non lisse des problèmes min-max

Il existe un équivalent à la différentielle en analyse non lisse : la dérivée de Clarke, notée  $\partial_c f$  (Clarke *et al.* (1998); Clarke (2013)). Sa définition dans un cadre général nécessiterait l'introduction de notions mathématiques dépassant le cadre de ce travail. Si l'on se limite au cadre des fonctions localement lipschitziennes définies sur un espace vectoriel réel de dimension finie, une définition équivalente mettant en jeu moins d'outils théoriques est alors possible. Pour cela, énonçons préalablement le célèbre théorème de Rademacher :

**Théorème 6.1 (Théorème de Rademacher)** *Soit une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne sur un ouvert  $U$ . La fonction  $f$  est alors différentiable presque partout sur  $U$  (au sens de la mesure de Lebesgue).*

Ce résultat permet d'introduire la caractérisation de la dérivée de Clarke pour les fonctions localement lipschitziennes (Clarke (2013), page 208, Théorème 10.27) :

**Théorème 6.2 (Dérivée de Clarke)** *Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement lipschitzienne au voisinage de  $x$ . Soit  $E$  un sous ensemble de mesure nulle de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $E_f$  l'ensemble des points en lesquels  $f$  n'est pas différentiable. On a alors :*

$$\partial_c f(x) = Co \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin E \cup E_f \right\},$$

où l'on rappelle que pour un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ , la fermeture convexe d'un sous ensemble  $A \subset E$  est donnée par :

$$Co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i : r \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_r \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}.$$

Il est à noter que si la fonction  $f$  est différentiable en un point  $x$ , on trouve que  $\partial_c f(x) = \{\nabla f(x)\}$ . Un extremum en analyse non lisse est alors caractérisé par le lemme suivante.

**Lemme 6.3** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement lipschitzienne. On a alors le résultat :*

$$x^* \in \mathbb{R}^n \text{ minimise localement } f \implies 0 \in \partial_c f(x^*)$$

À titre d'exemple, un calcul rapide portant sur (6.6) montre que  $\partial_c f(0) = [-16/25, 16/25]$  et donc que l'on a bien  $0 \in \partial_c f(0)$ .

Revenons au problème initial (6.5). Pour le résoudre, les méthodes numériques telles que `hinfstruct` vont chercher de manière itérative à trouver un point  $x^*$  tel que  $0 \in \partial_c f(x^*)$  (Apkarian *et al.* (2009)). Pour cela, partant d'un point  $x_k$ , la méthode va localement approximer la fonction  $f$  au voisinage de  $x_k$  par une fonction  $\Phi_x$  dont la complexité est moindre. Le problème de minimisation est alors appliqué à cette approximation dans un certain voisinage de  $x_k$ . Si le point ainsi obtenu permet d'obtenir une décroissance suffisante de  $f$  par rapport à sa valeur en  $x_k$ , le point est alors conservé en tant que  $x_{k+1}$ . Si le résultat n'est pas satisfaisant, l'approximation  $\Phi_x$  est revue de manière à être plus représentative du comportement de  $f$  au voisinage de  $x_k$ .



### 6.2.3 Exemple de mise en œuvre

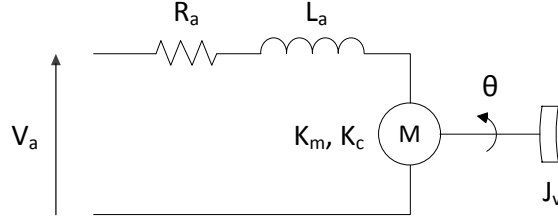


Figure 6.4 Moteur à courant continu

Considérons le problème d'asservissement en position d'un moteur à courant continu. L'entrée du système est alors la tension  $V_a$  appliquée en entrée du moteur et la sortie est la position angulaire du volant notée  $\theta$ . Les équations régissant le système électro-mécanique donnent lieu à un système d'ordre 3 donné par :

$$G = \frac{\theta}{V_a} = \frac{K_m}{[J(R_a + L_a s)s + K_m K_c]s} = \frac{500}{s(s^2 + 100s + 250)},$$

où les constantes  $L_a$ ,  $R_a$ ,  $K_c$  et  $K_m$  sont liées au moteur et où  $J_v$  représente l'inertie du volant dont on cherche à asservir la position. La sortie du système est utilisée afin de réaliser une correction Proportionnelle Intégrale (PI). On souhaite que le système en boucle fermée soit capable de suivre le modèle de référence  $G_{\text{ref}}$  donné ci-dessous, ainsi que de rejeter le bruit introduit par la mesure de l'angle  $\theta$ .

$$G_{\text{ref}} = \frac{4}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}.$$

On note  $T_1$  la différence entre le modèle de référence  $G_{\text{ref}}$  et la fonction de transfert du système en boucle fermée liant l'entrée de consigne  $\theta_r$  à la sortie  $\theta$ .  $T_2$  lie l'entrée de bruit  $n_\theta$  à la sortie  $\theta$ .

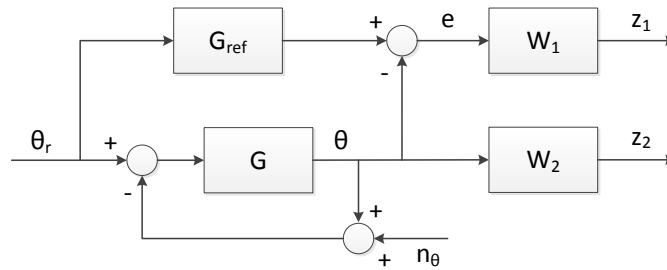


Figure 6.5 Modèle augmenté du moteur à courant continu pour la synthèse  $H_\infty$  structurée

Le suivi du modèle de référence est désiré aux basses et moyennes fréquences de manière à obtenir un bon transitoire. Pour cette raison on cherche à minimiser  $T_1$  sur cette plage de fréquence en la pondérant par un filtre passe bas  $W_1$ . *A contrario*, le bruit de mesure étant un phénomène lié aux hautes fréquences, on pondère  $T_2$  par un filtre passe haut  $W_2$ .

$$W_1 = 10 \frac{10}{s + 10}, \quad W_2 = 50 \frac{s}{s + 100}.$$

La contrainte généralisée prend alors la forme  $H(s) = \text{diag}[W_1 T_1, W_2 T_2]$  et est passée en argument de la fonction `hinfstruct`. La manière de procéder en ligne de commande MATLAB est décrite ci-dessous.

1. Définition des constantes du problème.  
`Jv=0.1; Km=0.5; Kc=0.5; Ra=1; La=0.01;`
2. Définition des fonctions de transfert  $G$  et  $G_{\text{ref}}$ .  
`s=zpk('s');`  
`G=Km/(s*(Jv*(La*s+Ra)*s+Km*Kc));`  
`Gref=4/(s^2+2*sqrt(2)*s+4);`
3. Définition des filtres de pondération  $W_1$  et  $W_2$ .  
`W1=10*10/(s+10);`  
`W2=50*s/(s+100);`
4. Définition du contrôleur PI dont les gains sont ajustables.  
`K=ltiblock.pid('K','pi');`
5. Calcul des fonctions de transfert  $T_1$  et  $T_2$ .  
`T1=feedback(K*G,1)-Gref;`  
`T2=-feedback(K*G,1);`
6. Concaténation des contraintes.  
`H0=blkdiag(W1*T1,W2*T2);`
7. Mise en œuvre de la fonction `hinfstruct`.  
`[H,gamma] = hinfstruct(H0);`
8. Extraction des gains du contrôleur après minimisation des contraintes  $H_\infty$ .  
`Kp=H.Blocks.K.Kp.Value;`  
`Ki=H.Blocks.K.Ki.Value;`

Le résultat est obtenu après 18 itérations avec un gain de 0.71, indiquant que les deux contraintes sont vérifiées. La réponse du système en boucle fermée avec le contrôleur PI ainsi ajusté est tracée à la Figure 6.6.

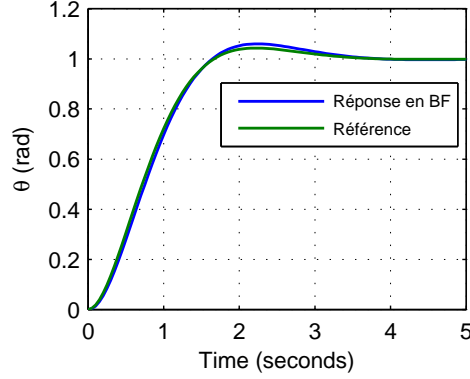


Figure 6.6 Réponse du moteur à courant continu en boucle fermée avec le contrôleur PI ajusté via `hinfstruct`

### 6.3 Système LPV et problème de séquençement des gains

Un système LPV est un système linéaire dont les matrices de la représentation d'état dépendent d'un vecteur de paramètres variant dans le temps  $\theta(t)$ . Plus précisément, un système LPV prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y = C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \\ \theta(t) \in \Theta, \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

où  $\Theta$  est le domaine d'opération du système. Dans une telle approche, on suppose que  $\theta(t)$  est connu en temps réel. C'est par exemple le cas en aéronautique où  $\theta(t)$  est fonction de la condition de vol, cette dernière étant mesurée tout au long du vol par divers capteurs.

De manière à assurer la stabilité et les performances du système en boucle fermée pour l'ensemble des trajectoires du paramètre  $\theta(t)$  dans le domaine d'opération, le contrôleur doit prendre en compte le caractère variable dans le temps du système LPV. Cela peut être réalisé via la synthèse d'un contrôleur lui-même fonction de  $\theta(t)$ . Une telle approche mène à l'architecture de contrôle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K(\theta(t))x_K + B_K(\theta(t))y \\ u = C_K(\theta(t))x_K + D_K(\theta(t))y \end{cases} \quad (6.8)$$

Diverses techniques existent dans la littérature afin de synthétiser de tels contrôleurs. On revient sur deux d'entre elles avant de présenter la méthode proposée dans ce mémoire.

### 6.3.1 Séquencement *a posteriori* des gains

L'approche classiquement utilisée pour effectuer un séquencement des gains consiste à noter que si l'on considère  $\theta(t)$  comme invariant dans le temps, le système (6.7) se réduit à un système LTI pour lequel on dispose d'une multitude de méthodes de synthèse. Ainsi, en discrétisant le domaine d'opération  $\Theta$  en un nombre fini de points de fonctionnement  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq p} \in \Theta$ , on élabore en chacun de ces points un contrôleur  $(A_{K,l}, B_{K,l}, C_{K,l}, D_{K,l})$  rencontrant les performances désirées. Le long d'une trajectoire :

$$\theta(t) = \sum_{l=1}^p \alpha_l(t) \theta_l,$$

le contrôleur LPV  $(A_K, B_K, C_K, D_K)$  est alors obtenu via :

$$\begin{pmatrix} A_K(\theta(t)) & B_K(\theta(t)) \\ C_K(\theta(t)) & D_K(\theta(t)) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^p \alpha_l(t) \begin{pmatrix} A_{K,l} & B_{K,l} \\ C_{K,l} & D_{K,l} \end{pmatrix}.$$

Cette approche est très populaire dans l'industrie de par sa simplicité et de par la possibilité qu'elle offre de réduire la synthèse d'un contrôleur LPV à la synthèse d'une famille finie de contrôleurs LTI. Néanmoins, une telle méthode n'offre aucune garantie quant au bon fonctionnement du système LPV en boucle fermée sur l'ensemble du domaine d'opération (Stiwell et Rugh (2000)). Des validations sont alors nécessaires pour s'assurer du bon fonctionnement du système. Lorsque le design n'est pas satisfaisant, on affine la discrétisation du domaine d'opération de manière à mieux capter le comportement local du système et on réitère le processus de synthèse.

### 6.3.2 Synthèse de contrôleurs LPV autoséquencés

Afin de garantir *a priori* la stabilité du système LPV sur l'ensemble du domaine d'opération, certaines méthodes ont été développées au cours des dernières années. Ces méthodes s'attachent à considérer la nature variant dans le temps du système en fournissant des contrôleurs assurant la stabilité et les performances du système en boucle fermée pour l'ensemble des trajectoires admissibles du vecteur de paramètres  $\theta(t) \in \Theta$ . La méthode ici présentée repose sur la résolution de LMI (Biannic et Apkarian (1999)).

#### 6.3.2.1 Définitions

Définissons tout d'abord plus précisément les termes de stabilité et de performance pour un système LPV. On dit que le système LPV (6.7) est quadratiquement stable sur  $\Theta$  et

rencontre la performance  $H_\infty$ ,  $\gamma$  si et seulement si :

1. le système est quadratiquement stable sur  $\Theta$ , i.e. il existe une fonction de Lyapounov  $V(x) = x^T P x$  avec  $P$  définie positive assurant la stabilité globale du système ;
2. le gain  $\mathbf{L}_2$  entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie est majoré par  $\gamma$ , c'est-à-dire  $\|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2$ , le long de toutes les trajectoires admissibles pour  $\theta(t) \in \Theta$ .

Pour un système LPV donné (6.7), on cherche à synthétiser un contrôleur LPV (6.8) de telle sorte à assurer la stabilité quadratique et les performances du système en boucle fermée. La solution ici présentée résout ce problème pour une classe particulière de systèmes LPV, dits systèmes LPV « polytopiques ». Ces systèmes sont définis de la façon suivante :

1. la dépendance du système vis-à-vis du paramètre  $\theta(t)$  est affine. Cela signifie que les matrices de la représentation d'état dépendent de manière affine du paramètre  $\theta(t)$  ;
2. le paramètre  $\theta(t)$  évolue dans un polytope  $\Theta$  dont les sommets sont  $\theta_1, \dots, \theta_r$ . Ainsi :

$$\Theta = Co \{ \theta_i : i = 1, \dots, r \}.$$

Dès lors, le système est tel que :

$$\begin{pmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{pmatrix} \in Co \left\{ \begin{pmatrix} A(\theta_i) & B(\theta_i) \\ C(\theta_i) & D(\theta_i) \end{pmatrix}, i = 1, \dots, r \right\}.$$

### 6.3.2.2 Formulation du problème

Considérons le système LPV augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B_1(\theta(t))w + B_2(\theta(t))u \\ z = C_1(\theta(t))x + D_{11}(\theta(t))w + D_{12}(\theta(t))u \\ y = C_2(\theta(t))x + D_{21}(\theta(t))w + D_{22}(\theta(t))u \\ \theta(t) \in \Theta = Co \{ \theta_i : i = 1, \dots, r \}, \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$  les entrée exogènes,  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$  les entrées de contrôle,  $z \in \mathbb{R}^{p_1}$  les sorties régulées et  $y \in \mathbb{R}^{p_2}$  les sorties mesurées. On suppose que le système LPV ainsi défini est polytopique :

$$\begin{pmatrix} A(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) & B_2(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t)) & D_{11}(\theta(t)) & D_{12}(\theta(t)) \\ C_2(\theta(t)) & D_{21}(\theta(t)) & D_{22}(\theta(t)) \end{pmatrix} \in \mathcal{P} = Co \left\{ \begin{pmatrix} A_i & B_{1,i} & B_{2,i} \\ C_{1,i} & D_{11,i} & D_{12,i} \\ C_{2,i} & D_{21,i} & D_{22,i} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, r \right\},$$

où  $A_i = A(\theta_i)$ ,  $B_{1,i} = B_1(\theta_i)$ , ... On formule finalement les 3 hypothèses suivantes :

1.  $D_{22}(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \Theta$ . De manière équivalente,  $D_{22,i} = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  ;
2.  $B_2(\theta)$ ,  $C_2(\theta)$ ,  $D_{12}(\theta)$  et  $D_{21}(\theta)$  sont indépendants de  $\theta$ . De manière équivalente :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad B_{2,i} = B_2, \quad C_{2,i} = C_2, \quad D_{12,i} = D_{12}, \quad D_{21,i} = D_{21} ;$$

3. les paires  $(A(\theta), B_2)$  et  $(A(\theta), C_2)$  sont respectivement quadratiquement stabilisable et quadratiquement détectable sur  $\Theta$ .

Sous ces hypothèses, on cherche à synthétiser un contrôleur LPV (6.8) de telle sorte que :

- le système en boucle fermée est quadratiquement stable ;
- la norme  $\mathbf{L}_2$  induite de l'opérateur faisant correspondre au signal d'entrée  $w$  le signal des sorties régulées  $z$  est inférieure à  $\gamma$  pour toutes les trajectoires  $\theta(t) \in \Theta$ .

### 6.3.2.3 Résolution

Le résultat est le suivant (Apkarian *et al.* (1994), page 3314, Théorème 2.3) :

**Théorème 6.4 (Conditions d'existence)** *Considérons le système LPV polytopique (6.9) et supposons qu'il dépende continuellement du paramètre  $\theta(t)$ . Supposons de plus que les trois hypothèses formulées précédemment sont vérifiées. On introduit alors  $\mathcal{N}_R$  et  $\mathcal{N}_S$  des bases de  $\ker(B_2^T, D_{1,2}^T)$  et  $\ker(C_2, D_{2,1})$ . Il existe alors un contrôleur LPV (6.8) assurant la stabilité quadratique et la performance  $H_\infty \gamma$  le long de toutes les trajectoires  $\theta(t) \in \Theta$  si et seulement si il existe deux matrices symétriques à coefficients réels  $R, S \in \mathcal{S}^n$  telles que les  $2r + 1$  LMI suivantes soient vérifiées :*

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{cc|c} A_i R + R A_i^T & R C_{1,i}^T & B_{1,i} \\ \hline C_{1,i} R & -\gamma I & D_{11,i} \\ \hline B_{1,i}^T & D_{11,i}^T & -\gamma I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) < 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (6.10)$$

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{cc|c} A_i^T S + S A_i & S B_{1,i} & C_{1,i}^T \\ \hline B_{1,i}^T S & -\gamma I & D_{11,i}^T \\ \hline C_{1,i} & D_{11,i} & -\gamma I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) < 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (6.11)$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0. \quad (6.12)$$

Si le théorème est vérifié pour les matrices  $R$  et  $S$  et pour le gain  $\gamma$ , il est alors possible via des manipulations algébriques et la résolution de  $r$  LMI supplémentaires<sup>1</sup> de synthétiser  $r$  contrôleurs LTI  $(A_{K,i}, B_{K,i}, C_{K,i}, D_{K,i})$  (Gahinet et Apkarian (1994)) tels que pour toute trajectoire  $\theta(t) \in \Theta$ , décrite par :

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \theta_i,$$

le contrôleur LPV (6.8) de représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} A_K(\theta(t)) & B_K(\theta(t)) \\ C_K(\theta(t)) & D_K(\theta(t)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \begin{pmatrix} A_{K,i} & B_{K,i} \\ C_{K,i} & D_{K,i} \end{pmatrix},$$

stabilise quadratiquement le système en boucle fermée et assure la performance  $H_\infty \gamma$  le long de toutes les trajectoire  $\theta(t) \in \Theta$ .

#### 6.3.2.4 Avantages et inconvénients

Cette méthode permet de résoudre le problème de synthèse  $H_\infty$  pour des systèmes de type LPV polytopiques. Les conditions (6.10)-(6.12) du théorème d'existence consistent en un ensemble de LMI pour les variables  $R$  et  $S$ . Le problème ainsi formulé est convexe, rendant possible sa résolution via l'une des nombreuses techniques d'optimisation convexe disponibles. Cette méthode présente néanmoins quelques désavantages. Premièrement, cette méthode n'est valable que dans le cadre de systèmes LPV polytopiques pour lesquels la dépendance des matrices d'état vis-à-vis du paramètre  $\theta(t)$  est affine. De plus, ce problème nécessite la résolution d'un nombre de LMI qui croît avec le nombre de sommets du domaine d'opération  $\Theta$  et dont la dimension est fonction de la taille des matrices de la représentation d'état du système LPV. Au-delà de ces aspects numériques, cette méthode ne tient pas compte des limitations quant à la vitesse de variation du paramètre  $\theta(t)$ . En effet, la méthode ici présentée assure la stabilité du système en boucle fermée pour des vitesses de variation illimitées du paramètre  $\theta(t)$ . Cela conduit à un certain conservatisme de la méthode et à une relaxation des performances. Finalement, cette méthode ne permet pas de tenir compte des incertitudes portant sur le modèle.

#### 6.3.3 Autoséquencement via la synthèse $H_\infty$ structurée

On présente ici plusieurs applications des méthodes  $H_\infty$  structurées pour effectuer la synthèse de contrôleurs robustes et autoséquencés à architecture fixe. Ces méthodes reposent

---

1. Dont la résolubilité est assurée par le théorème.

sur des approches de synthèse multimodèle et seront utilisées dans la suite de ce mémoire pour effectuer la synthèse des contrôleurs. Notons tout d'abord que pour une architecture de contrôle définie *a priori*, l'objectif est de séquencer les gains  $k_1, \dots, k_{n_K}$  du contrôleur de manière à assurer la stabilité et les performances du système bouclé. Le contrôleur LPV présente donc la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K [k_1(\theta(t)), \dots, k_{n_K}(\theta(t))] x_K + B_K [k_1(\theta(t)), \dots, k_{n_K}(\theta(t))] y \\ u = C_K [k_1(\theta(t)), \dots, k_{n_K}(\theta(t))] x_K + D_K [k_1(\theta(t)), \dots, k_{n_K}(\theta(t))] y \end{cases} \quad (6.13)$$

L'enjeu de la synthèse consiste donc à définir et à ajuster la dépendance des gains du contrôleur vis-à-vis des variables de séquençement dans le but d'assurer la stabilité et les performances du système en boucle fermée. De plus, ce contrôleur ainsi séquencé doit être robuste quant aux incertitudes portant sur le modèle de référence. Cet aspect est considéré par la suite dans le but de synthétiser des contrôleurs robustes et autoséquencés.

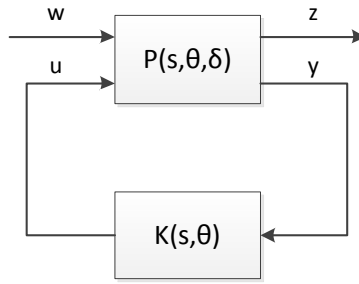


Figure 6.7 Système sous forme standard

Afin d'introduire les méthodes de synthèse proposées dans ce mémoire, introduisons quelques notations supplémentaires. Soit  $P(s, \theta, \delta)$  le système où  $\theta$  est le point de fonctionnement et  $\delta$  est un vecteur de paramètres incertains. Soit  $K(s, \theta)$  le contrôleur à architecture fixe dont les gains sont fonction du point d'opération  $\theta$  (Fig. 6.7). On suppose que les variables de séquençement  $\theta$  évoluent dans le domaine d'opération  $\Theta$  et qu'elles sont connues en temps réel. On suppose également que les incertitudes  $\delta$  évoluent dans le domaine  $\Delta$  dont les bornes sont connues.

Trois stratégies de synthèse sont ici proposées. Il est à noter qu'aucune de ces stratégies ne permet de garantir la stabilité du système en boucle fermée sur l'ensemble du domaine de vol et/ou domaine incertain, tant pour des paramètres stationnaires que variants. Il en résulte qu'une phase d'analyse de stabilité robuste postérieure à la phase de synthèse est indispensable.



### 6.3.3.1 Synthèse robuste

Pour un point de fonctionnement donné  $\theta_0$ , considérons le problème de synthèse robuste suivant. Soit le système incertain  $G(s, \theta_0, \delta)$  avec  $\delta \in \Delta$ . Les contraintes de design sont les suivantes :

$$\|W_i T_i(s, \theta_0, \delta)\|_\infty < 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad \delta \in \Delta.$$

Le problème continu ne pouvant être résolu, on considère le problème approché basé sur une discrétisation du domaine incertain en un nombre fini de points  $(\delta_j)_{1 \leq j \leq n} \in \Delta$  :

$$\|W_i T_i(s, \theta_0, \delta_j)\|_\infty < 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Les contraintes sont alors concaténées en une seule contrainte généralisée  $H$  :

$$H(s) = \text{diag} \left[ (W_i T_i(s, \theta_0, \delta_j))_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n} \right].$$

Le recours à la fonction MATLAB `hinfstruct` permet d'ajuster la valeurs des gains du contrôleur à architecture fixe  $K$  de manière à minimiser  $\|H(s)\|_\infty$  et aboutir à la synthèse d'un contrôleur robuste.

### 6.3.3.2 Synthèse de contrôleurs autoséquencés

Considérons d'abord le système  $P(s, \theta)$  dépendant uniquement du point d'opération courant  $\theta \in \Theta$  en l'absence d'incertitude. En considérant une méthode classique de séquençement des gains telle que décrite à la Sous-Section 6.3.1, des contrôleurs LTI sont synthétisés en un nombre fini de points du domaine d'opération. Les gains de ces contrôleurs sont par la suite interpolés *a posteriori* en fonction des variables de séquençement. En se basant sur une telle approche, ainsi que des considérations physiques, on envisage un séquençement des gains *a priori*. En particulier, chaque gain scalaire  $k$  est exprimé *a priori* sous la forme d'une fonction polynomiale (ou éventuellement d'une fraction rationnelle) des  $n_\theta$  variables de séquençement :

$$k(\theta) = \sum_{d_1 + \dots + d_n \leq d} k_{d_1, \dots, d_n} \prod_{i=1}^{n_\theta} \theta(i)^{d_i}. \quad (6.14)$$

En considérant un domaine d'opération discrétisé en un nombre fini de points d'opération  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq p} \in \Theta$ , le contrôleur autoséquencé doit satisfaire les contraintes suivantes :

$$\|W_i T_i(s, \theta_l)\|_\infty < 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, p.$$

Il est à noter que les fonctions de pondération peuvent éventuellement dépendre du point de fonctionnement considéré. Ces contraintes sont alors concaténées en une seule contrainte généralisée  $H(s)$  :

$$H(s) = \text{diag} \left[ (W_i T_i(s, \theta_l))_{i=1, \dots, m, l=1, \dots, p} \right].$$

Dans une telle procédure, **hinfstruct** va venir ajuster les coefficients  $k_{d_1, \dots, d_n}$  pour synthétiser un contrôleur minimisant  $\|H(s)\|_\infty$ . On obtient de cette manière un autoséquencement des gains du contrôleur à architecture fixe.

### 6.3.3.3 Synthèse de contrôleurs robustes et autoséquencés

L'idée est de venir combiner les approches de synthèse robuste et de synthèse d'un correcteur autoséquencé pour élaborer en une seule étape un contrôleur robuste et autoséquencé. Pour cela, on considère les deux discrétisations suivantes :  $(\delta_j)_{1 \leq j \leq n} \in \Delta$  et  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq p} \in \Theta$ . L'architecture du contrôleur est définie *a priori* et chaque gain scalaire  $k$  est exprimé comme une fonction polynomiale (ou éventuellement une fraction rationnelle) des variables de séquencement (6.14). Le contrôleur robuste et autoséquencé doit alors satisfaire :

$$\|W_i T_i(s, \theta_l, \delta_j)\|_\infty < 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, p.$$

Une nouvelle fois, on construit la contrainte généralisée  $H(s)$  :

$$H(s) = \text{diag} \left[ (W_i T_i(s, \theta_l, \delta_j))_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, l=1, \dots, p} \right].$$

La synthèse est une nouvelle fois prise en charge par **hinfstruct** de manière à synthétiser un contrôleur robuste et autoséquencé.

### 6.3.3.4 Avantages et inconvénients

La méthode ici développée se veut être un compromis entre une méthode de synthèse effectuant un séquencement des gains *a posteriori* et une méthode offrant des garanties théoriques quant à la stabilité et les performances du système LPV. Ainsi, la méthode présentée dans ce mémoire vise à intégrer le problème de séquencement des gains dans la phase de synthèse du contrôleur mais en se basant sur une discrétisation de l'enveloppe de vol et pour une architecture de contrôle fixée *a priori*. De cette façon, le séquencement des gains est optimisé en fonction des contraintes tout en conservant un problème dont la complexité est moindre relativement aux méthodes de synthèse LPV. De plus, cette méthode n'impose aucune limitation quant à la dépendance du système LPV vis-à-vis du paramètre  $\theta(t)$  et permet de tenir explicitement compte des incertitudes du modèle. En contrepartie, une telle approche ne per-

met pas de garantir *a priori* la stabilité et les performances du système à travers le domaine d'opération et le domaine incertain. Une phase de validation *a posteriori* du contrôleur LPV est donc indispensable.

## CHAPITRE 7

### SYNTHÈSE DE SYSTÈMES DE COMMANDES DE VOL ROBUSTES ET AUTOSÉQUENCÉS

Dans le cadre des systèmes de commandes de vol, le problème de séquençement des gains consiste à faire varier les gains du contrôleur en fonction de la condition de vol courante de l'avion. Classiquement, les gains du contrôleur en un point de vol donné sont calculés via de multiples interpolations locales à partir des gains obtenus pour l'enveloppe de vol discrétisée, ces derniers étant stockés dans des tables plus communément appelées *lookup tables* (Rugh (1991); Shamma et Athans (1990); Lawrence et Rugh (1995)). Cette approche, bien qu'étant largement employée dans l'industrie et ayant fait ses preuves dans le domaine des commandes de vol, n'offre aucune garantie quant aux performances du contrôleur sur l'ensemble de l'enveloppe de vol (Stiwell et Rugh (2000)). De plus, du fait de l'interpolation, les gains sont exprimés comme des fonctions affines par morceaux des variables de séquençement, ce qui rend la phase de validation fastidieuse. Il est également courant que les *lookup tables* présentent des comportements irréguliers en certains points, rendant difficile l'interpolation dans les zones concernées. Afin d'éviter ces inconvénients, des techniques d'autoséquençement des gains ont été développées (Magni *et al.* (1998); Saussié *et al.* (2008, 2011)).

Le Chapitre 6 a permis de mettre en place les outils et le cadre théorique pour l'élaboration de contrôleurs robustes et autoséquencés via les méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurées. Ils sont mis en place dans le cadre du contrôle de la dynamique longitudinale du F-16. En se basant sur l'architecture de contrôle définie à la Section 5.4, l'objectif de cette partie est de synthétiser un système de commandes de vol dont les gains sont séquencés sous la forme de fonctions polynomiales du Mach et de l'altitude. Le contrôleur ainsi séquencé doit permettre d'assurer les performances du système en boucle fermée sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

La Section 7.1 est consacrée à la transposition du cahier des charges en contraintes  $H_\infty$ . La Section 7.2 est dédiée à la synthèse de contrôleurs robustes en différents points de l'enveloppe de vol. Ils sont utilisés pour effectuer un séquençement des gains du contrôleur *a posteriori* via des fonctions polynomiales. Ce résultat sert alors de condition initiale pour la synthèse de contrôleurs autoséquencés à la Section 7.3. La reformulation du problème de synthèse dans le cadre de l'optimisation multiobjectif est présentée à la Section 7.4. Finalement, les performances des contrôleurs synthétisés sont évaluées à la Section 7.5.

## 7.1 Transcription du cahier des charges dans le formalisme $H_\infty$

La méthode proposée dans ce mémoire se base sur les méthodes de synthèse  $H_\infty$ . Le recours à de tels outils nécessite de transposer les contraintes formulées par le cahier des charges dans le formalisme  $H_\infty$ . Ces contraintes, une fois définies, doivent être validées afin de vérifier qu'elles permettent d'effectuer avec succès l'ajustement des gains du contrôleur dont l'architecture est définie à la Figure 5.7.

### 7.1.1 Formulation des contraintes $H_\infty$

La première étape consiste à traduire les contraintes imposées par le cahier des charges de la Sous-Section 5.3 en contraintes  $H_\infty$ . Il s'agit entre autres de définir les fonctions de pondération  $W$  intervenant dans le modèle augmenté du système pour effectuer la synthèse  $H_\infty$ . Cette phase est primordiale, déterminant les possibilités de succès ou d'échec de la synthèse  $H_\infty$ . Des contraintes trop importantes conduiront à un échec de la minimisation de la norme infinie. À l'inverse, des contraintes trop faibles seront facilement minimisées mais ne permettront pas d'obtenir de résultats concluants. Il en résulte une procédure itérative afin d'ajuster au mieux les différentes fonctions de pondération. On cherche à trouver de cette manière le meilleur compromis entre les différentes contraintes.

Afin de conserver la complexité du problème la plus basse possible, il est conseillé de limiter le nombre et l'ordre des fonctions de pondération utilisées pour la synthèse  $H_\infty$ . De cette manière, on cherche à éviter l'accroissement des temps de calculs.

**Poursuite d'un modèle de référence** Les contraintes d'amortissement et de temps de réponse du système en boucle fermée sont transposées en un problème de poursuite d'un modèle de référence  $G_{\text{ref}}$ . Cela se traduit dans le domaine fréquentiel par la minimisation de l'erreur  $e$  entre la réponse du système en boucle fermée et celle du modèle de référence  $G_{\text{ref}}$  sur une plage de fréquence donnée (Fig. 7.1). Le modèle de référence est choisi comme étant un second ordre. L'amortissement est fixé à  $\xi_{\text{ref}} = 0.7$  et la pulsation naturelle  $\omega_{n,\text{ref}}$ , qui détermine le temps de réponse du modèle, est choisie en fonction du point de vol :

$$G_{\text{ref}} = \frac{\omega_{n,\text{ref}}^2}{s^2 + 2\xi_{\text{ref}}\omega_{n,\text{ref}}s + \omega_{n,\text{ref}}^2}. \quad (7.1)$$

Afin d'assurer un bon suivi des transitoires et un bon comportement en régime permanent, la poursuite du modèle de référence est requise pour les basses et moyennes fréquences. Cette plage de fréquences correspond au domaine d'opération du mode *Short Period* et est transcrite

dans le domaine  $H_\infty$  par le filtre passe-bas :

$$W_1 = 15 \left( \frac{5}{s+5} \right)^2. \quad (7.2)$$

La contrainte de poursuite est alors exprimée dans le formalisme  $H_\infty$  par :

$$\|W_1 T_1\|_\infty < 1, \quad (7.3)$$

où  $T_1 = T_{Nz} - G_{\text{ref}}$  est la fonction de transfert reliant l'entrée de commande  $Nzc$  à l'erreur  $e$  et où l'on rappelle que  $T_{Nz}$  est donnée par l'équation (5.12).

**Rejet du bruit de mesure** Le rejet du bruit de mesure est désiré pour les hautes fréquences, ce qui s'exprime par :

$$\|W_2 T_2\|_\infty < 1, \quad (7.4)$$

où  $T_2 = T_n$  est la fonction de transfert entre les entrées de bruit  $n_{Nz}$  et  $n_q$  et la commande de l'actionneur  $\delta_{ec}$  (5.17). La fonction de pondération est définie comme étant un passe-haut d'expression :

$$W_2 = \frac{1}{20} \frac{s}{s+80} \frac{s^2/80^2 + \sqrt{2}s/80 + 1}{s^2/8000^2 + \sqrt{2}s/8000 + 1}. \quad (7.5)$$

**Marges de stabilité** Les marges de stabilité peuvent être exprimées dans le domaine fréquentiel à travers des conditions sur le système en boucle fermée (Skogestad et Postlethwaite (2005)). Avec  $T_3$  la fonction de transfert reliant l'entrée de perturbation  $w$  à l'entrée de l'actionneur  $\delta_{ec}$  et  $W_3 = 0.8$ , la dernière contrainte est exprimée par :

$$\|W_3 T_3\|_\infty < 1. \quad (7.6)$$

Cette condition assure une marge de gain  $GM \geq 13.97\text{dB}$  ou  $GM \leq -5.1\text{dB}$  et une marge de phase  $|PM| \geq 47.15^\circ$ .

L'intégration de ces contraintes à l'architecture du système en boucle fermée (Fig. 5.7) fournit le système augmenté de la Figure 7.1.

### 7.1.2 Validation des contraintes $H_\infty$ et de l'architecture de contrôle

On vérifie pour un point de vol donné ( $V_T = 0.6 \text{ M}$ ,  $h = 1000 \text{ m}$ ) le bon comportement de la synthèse  $H_\infty$  structurée pour la configuration nominale de masse et de centrage du F-16. Pour cela, on compare au modèle de référence les résultats obtenus sous MATLAB avec la

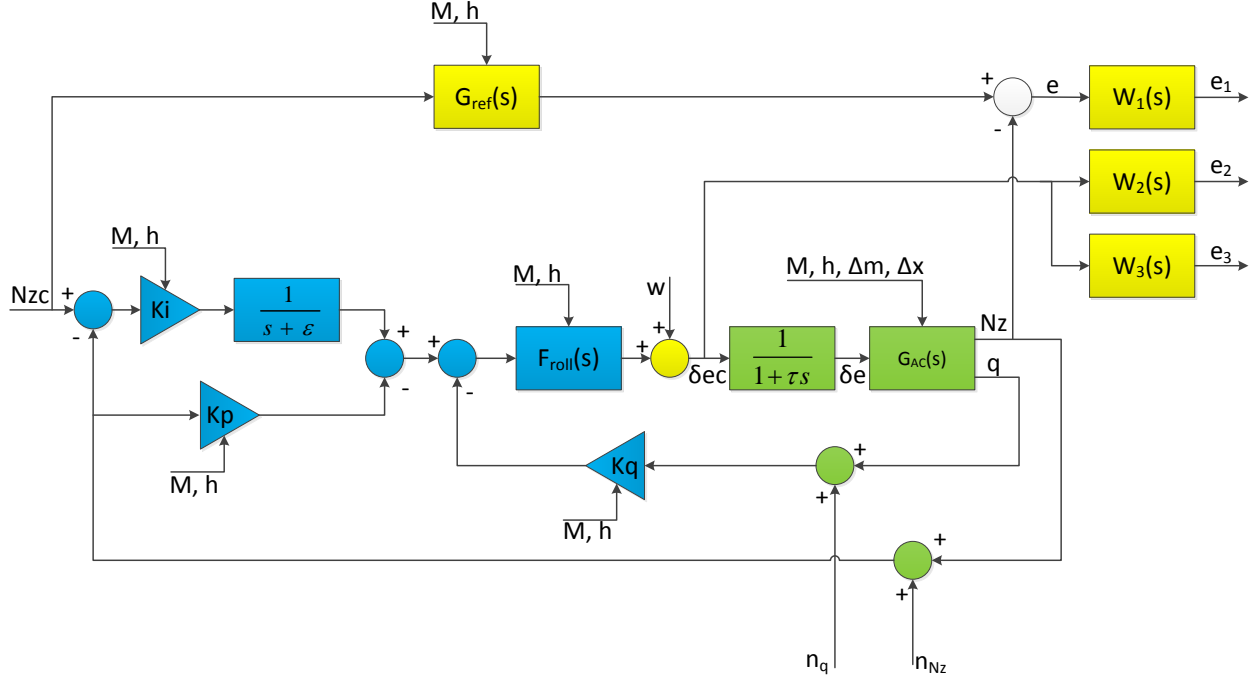


Figure 7.1 Modèle augmenté du système

commande `hinfstruct` pour la synthèse  $H_\infty$  structurée basée sur l'architecture de contrôle de la Figure 5.7 et la commande `hinfsyn` qui procède à une synthèse  $H_\infty$  classique.

La synthèse  $H_\infty$  classique conduit à un gain final élevé  $\|T_{zw}(s)\|_\infty = 500$ , semblant indiquer que les contraintes  $H_\infty$  sont mal ajustées. Néanmoins, le calcul de la norme infinie de la contrainte généralisée  $H(s) = \text{diag}[W_1T_1, W_2T_2, W_3T_3]$  donne le résultat 1.01, avec en particulier une performance en poursuite vérifiant  $\|W_1T_1\|_\infty = 0.20$ . On est donc ici confronté au problème soulevé page 69 où l'une des fonctions de transfert scalaire de  $T_{zw}(s)$  sur lesquelles aucune contrainte n'est imposée par le cahier des charges vient limiter le résultat de la minimisation.

La synthèse  $H_\infty$  structurée conduit quant à elle à un gain final  $\|H(s)\|_\infty = 0.88$ , indiquant que les contraintes  $H_\infty$  sont bien ajustées. La synthèse  $H_\infty$  structurée donne donc lieu à un meilleur résultat de minimisation de la contrainte généralisée  $H(s)$  que la synthèse  $H_\infty$  classique<sup>1</sup>.

1. Notons bien que l'on parle ici de la contrainte généralisée  $H(s)$  et non pas de la fonction de transfert globale liant les entrée exogènes aux sorties régulées  $T_{zw}(s)$ .

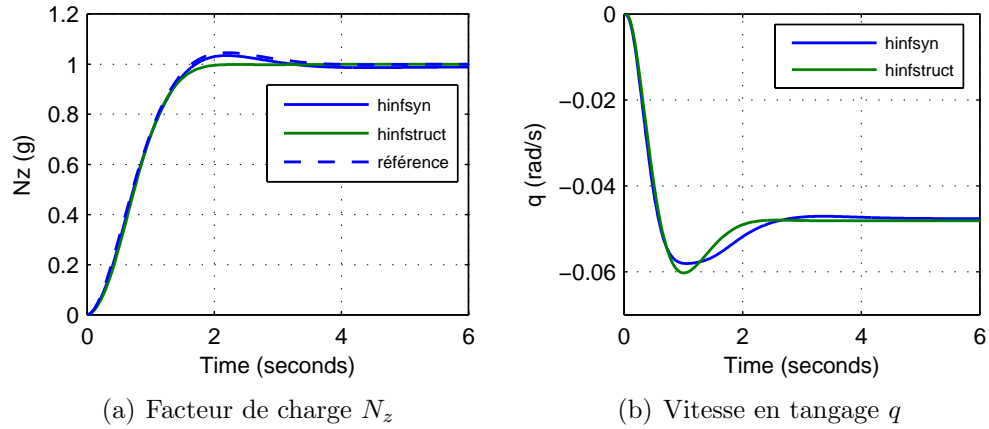


Figure 7.2 Comparaison des synthèses  $H_\infty$  classique et  $H_\infty$  structurée

La réponse à un échelon unitaire de l'avion en boucle fermée est tracée Figure 7.2. Au niveau temporel, la synthèse  $H_\infty$  classique permet d'obtenir un suivi parfait du modèle de référence, au prix d'un contrôleur d'ordre élevé, à savoir 29. La synthèse  $H_\infty$  structurée, basée sur une architecture de contrôle d'ordre 3, permet d'obtenir un bon suivi du modèle de référence. Il est à noter qu'il est ici possible d'ajuster les fonctions de pondération pour améliorer le résultat. Rappelons néanmoins que l'objectif est d'élaborer un contrôleur robuste aux variations de masse et de centrage. En conséquence, les fonctions de pondération ont été ajustées de manière à obtenir le meilleur résultat possible dans le cadre des synthèses de contrôleurs robustes se basant sur plusieurs modèles de l'avion et non pas seulement le modèle nominal.

Ce résultat permet de valider à la fois l'architecture du contrôleur, le recours à la méthode de synthèse  $H_\infty$  structurée `hinfstruct` et le choix des contraintes  $H_\infty$ .

### 7.1.3 Ajustement du modèle de référence

De manière à compléter la procédure, il reste à fixer la valeur de la pulsation naturelle  $\omega_{n,\text{ref}}$  du modèle de référence. La Figure 7.3 illustre l'impact de ce paramètre sur les réponses temporelles à un échelon unitaire du facteur de charge  $N_z$  et de la vitesse en tangage  $q$ . Les gains  $\gamma$  atteints par  $\|H(s)\|_\infty$  après minimisation via `hinfstruct` sont donnés dans le Tableau 7.1. Ces résultats ont été obtenus avec la condition de vol ( $V_T = 0.6 \text{ M}$ ,  $h = 5000 \text{ m}$ ) dans le cadre d'une synthèse robuste, i.e. en considérant plusieurs configurations de masse et de centrage. La tendance observée se généralise à l'ensemble de l'enveloppe de vol.



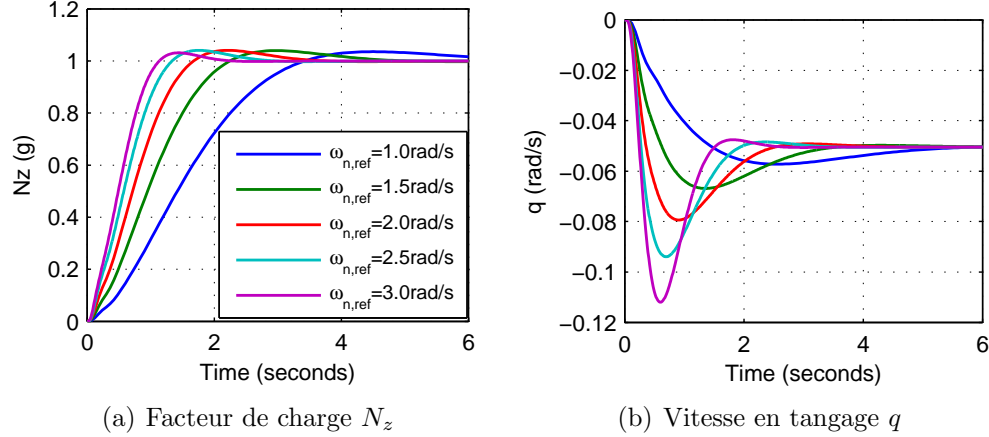


Figure 7.3 Impact de  $\omega_{n,ref}$  sur la réponse temporelle de l'avion en boucle fermée

Tableau 7.1 Impact de  $\omega_{n,ref}$  sur le pic  $\gamma$  atteint par  $H(s)$  après minimisation

$\omega_{n,ref}$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\gamma$	1.84	1.56	1.42	1.34	1.28

Une augmentation de  $\omega_{n,ref}$  réduit le temps de réponse du facteur de charge  $N_z$  et permet une meilleur optimisation des critères  $H_\infty$ . Le désavantage survient au niveau du dépassement de la vitesse en tangage qui augmente avec la pulsation naturelle du modèle de référence. De manière à respecter le cahier des charges,  $\omega_{n,ref}$  est ajusté pour chaque condition de vol de telle sorte que le dépassement en  $q$  demeure inférieur à 100%.

## 7.2 Synthèse préliminaire

La première étape est de synthétiser des contrôleurs robustes pour un ensemble fini de conditions de vol, ces dernières devant être représentatives du comportement du système sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Cette étape préliminaire est primordiale dans la synthèse du contrôleur robuste et autoséquenté. Les raisons sont les suivantes :

- la pulsation naturelle  $\omega_{n,ref}$  du modèle de référence doit être ajustée en fonction du point de vol considéré. En effet, ce paramètre est proportionnel au temps de réponse du système en boucle fermée. De par la physique même de l'avion, il est illusoire d'espérer obtenir le même temps de réponse sur l'ensemble de l'enveloppe de vol ;
- définir *a priori* la dépendance des gains du contrôleur vis-à-vis des paramètres de séquentement que sont le nombre de Mach et l'altitude de vol. Ces dépendances seront utilisées dans la synthèse du contrôleur autoséquenté ;

- procéder à un séquençement des gains *a posteriori*. La fonction `hinfstruct` procédant à une minimisation locale, la condition initiale utilisée peut se révéler être prépondérante dans les possibilités de succès ou d'échec de l'optimisation. Dans ce contexte, le séquençement des gains *a posteriori* constitue un candidat tout désigné pour initialiser la synthèse du contrôleur autoséquéncé.

Dans le but d'appliquer les méthodes décrites à la Sous-Section 6.3.3, on procède à une discrétisation de l'enveloppe de vol  $\Theta$  et du domaine incertain  $\Delta$ . L'enveloppe de vol est discrétisée en 12 points de vol  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq 12}$  (Fig. 7.4(a)) et le domaine incertain en 5 points  $(\delta_j)_{1 \leq j \leq 5}$ , ces derniers capturant la configuration nominale et les 4 configurations extrêmes (Fig. 7.4(b)).

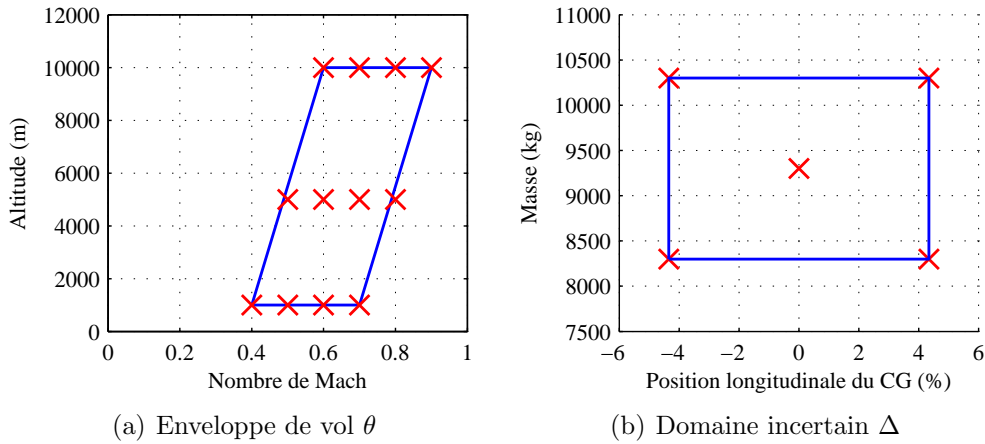


Figure 7.4 Discretisation de l'enveloppe de vol  $\Theta$  et du domaine incertain  $\Delta$

## 7.2.1 Synthèse de contrôleurs robustes

### 7.2.1.1 Procédure

Pour chaque condition de vol  $\theta_l$  de la Figure 7.4(a), la méthode de synthèse robuste décrite à la Sous-Section 6.3.3 est appliquée. Pour cela, les 5 configurations de masse et centrage de la Figure 7.4(b) sont considérées. Pour chacune d'entre elles, les 3 critères  $H_\infty$  (7.3), (7.4 et (7.6) sont pris en compte. Au total, la synthèse du contrôleur en un point de vol donné est donc basée sur 15 critères fréquentiels concaténés dans la contrainte généralisée :

$$H_l(s) = \text{diag} \left[ (W_i T_i(s, \theta_l, \delta_j))_{i=1, \dots, 3, j=1, \dots, 5} \right], \quad l = 1, \dots, 12, \quad (7.7)$$

où chaque fonction de transfert  $T_i(s, \theta_l, \delta_j)$  peut être écrite sous forme standard  $T_i(s, \theta_l, \delta_j) = F_l(P_i(s, \theta_l, \delta_j), K(s))$ . Les fonctions de transfert  $T_i(s, \theta_l, \delta_j)$  sont obtenues via un modèle Simulink en utilisant l'environnement *Tunable Models* de MATLAB.

La procédure est complétée par le réglage de la valeur de  $\omega_{n,\text{ref}}$  de manière itérative. En effectuant plusieurs fois la synthèse via la fonction `hinfstruct`, on ajuste d'une itération à l'autre la valeur de  $\omega_{n,\text{ref}}$  de telle sorte que le dépassement sur  $q$  ne dépasse pas 100% pour aucune des 5 configurations incertaines  $(\delta_j)_{1 \leq j \leq 5}$ .

### 7.2.1.2 Résultats

Les 12 normes  $H_\infty$  obtenues pour les 12 conditions de vol sont résumées dans le Tableau 7.2. Le maximum obtenu est de 1.44, ce qui indique que les contraintes sont majoritairement satisfaites.

Tableau 7.2 Synthèse préliminaire : norme  $H_\infty$  obtenue pour chaque condition de vol

h (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	1.44	1.28	1.16	1.14	-	-
5000	-	1.45	1.35	1.28	1.25	-
10000	-	-	1.48	1.47	1.45	1.41

Les gains du contrôleur  $K_i$ ,  $K_p$ ,  $K_q$ ,  $\omega_n$  et  $\xi$  obtenus, ainsi que la pulsation naturelle  $\omega_{n,\text{ref}}$  du modèle de références sont donnés en Annexe D. Une représentation graphique en est donnée à la Figure 7.5. Dans celle-ci, les coefficients  $\omega_n^2$  et  $2\xi/\omega_n$  sont considérés plutôt que les classiques  $\omega_n$  et  $\xi$  pour des raisons pratiques explicitées ultérieurement.

### 7.2.1.3 Évaluation des performances

Au cours de cette phase de synthèse, le bon comportement du système en boucle fermée a été évalué en se basant sur les réponses temporelles du système en boucle fermée et sur l'évaluation de critères de performance classiques (placement des pôles, amortissement, marges de stabilité).

**Réponses temporelles du système en boucle fermée** Pour illustrer les résultats obtenus, considérons par exemple la condition de vol ( $V_T = 0.7 \text{ M}$ ,  $h = 5000 \text{ m}$ ). Les réponses

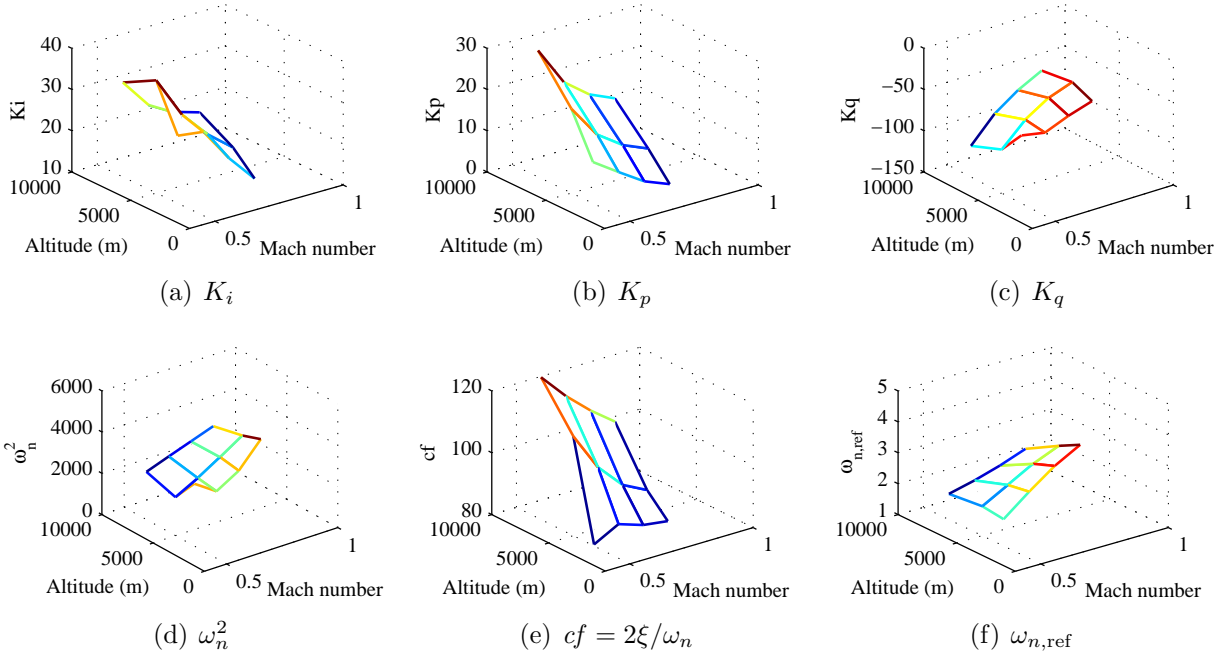


Figure 7.5 Gains obtenus lors de la synthèse préliminaire

temporelles du système en boucle fermée sont tracées Figure 7.6 pour 63 configurations incertaines<sup>2</sup>. La Figure 7.6(a) permet de comparer la réponse du facteur de charge du système en boucle fermée au modèle de référence (croix rouges). La référence est correctement suivie en dépit des incertitudes avec un temps de réponse inférieur à 2.5 s et un dépassement inférieur à 10%. La Figure 7.6(b) montre que le dépassement sur la vitesse en tangage dépend significativement de la configuration de masse et de centrage. En se basant sur les résultats obtenus lors de la phase de synthèse, on constate empiriquement que le dépassement minimal intervient pour la configuration dans laquelle la masse est la plus faible et le centre de gravité est le plus à l'avant : ( $\Delta m = -1000$  kg,  $\Delta x = 4.35\%$ ). Le dépassement maximal est quant à lui rencontré lorsque la masse est la plus élevée et pour un centre de gravité placé à l'arrière : ( $\Delta m = 1000$  kg,  $\Delta x = -4.35\%$ ). Les Figures 7.6(c) et 7.6(d) montrent qu'il n'y a pas de saturation au niveau de l'actionneur.

**Marges de stabilité** Pour la même condition de vol que précédemment, on évalue les marges de stabilité du système au niveau de la commande  $\delta_{ec}$ . Pour cela, on considère le diagramme de Bode de la fonction de transfert obtenue en ouvrant la boucle au niveau de  $\delta_{ec}$  entre l'entrée de l'actionneur et la sortie du contrôleur (Fig. 7.7). On note que dépendam-

2. 9 configurations de masse :  $-1000$  kg à  $1000$  kg avec un pas de  $250$  kg ; et 7 configurations de centre de gravité :  $-4.35\%$  à  $4.35\%$  avec un pas de  $1.45\%$ .

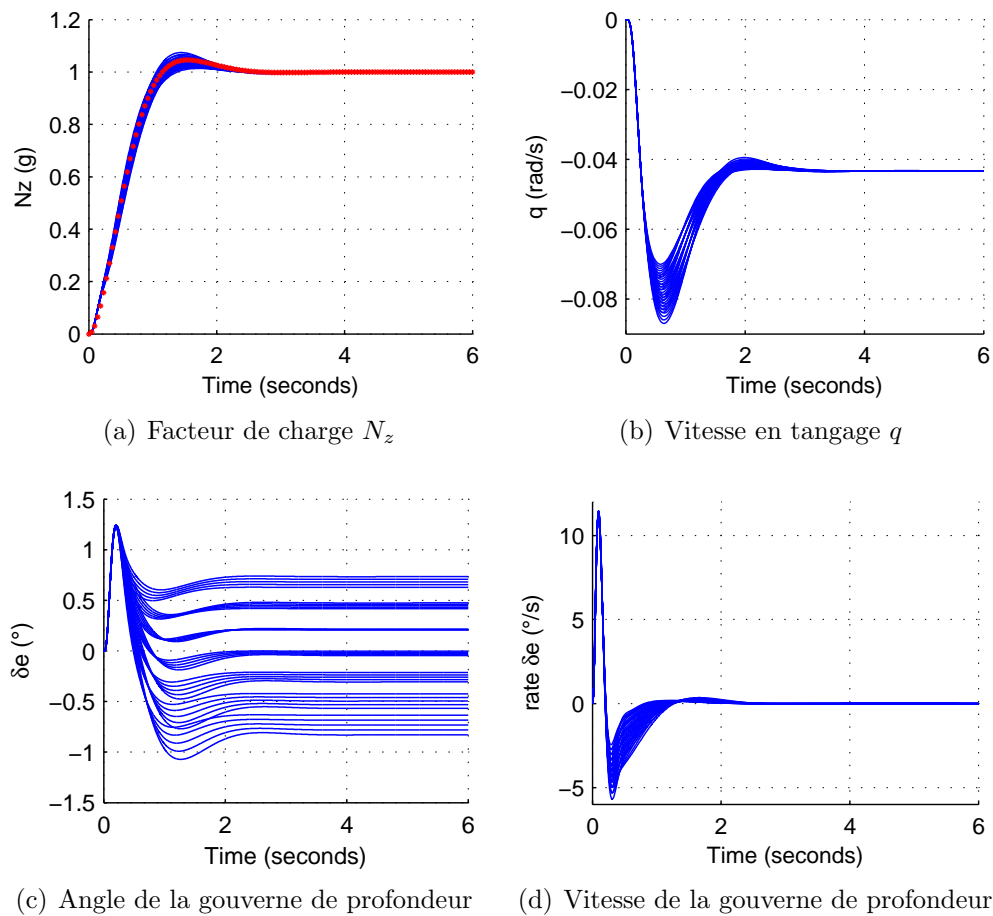


Figure 7.6 Synthèse préliminaire : réponses temporelles en boucle fermée pour la condition de vol  $V_T = 0.7 M$ ,  $h = 5000$  m

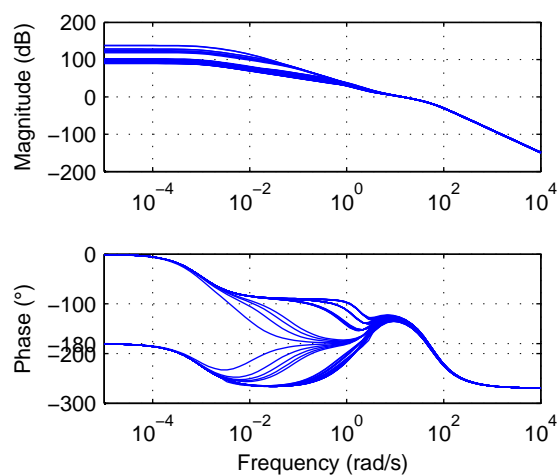


Figure 7.7 Synthèse préliminaire : diagramme de Bode évaluant la stabilité du système en entrée de l'actionneur

ment de la configuration de masse et de centrage, la phase initiale du système est de  $0^\circ$  ou  $-180^\circ$ . Pour expliquer ce phénomène, on se réfère à l'expression de la fonction de transfert ici considérée (5.14). Les pôles de cette dernière sont les racines du polynôme :

$$(\tau s + 1)(s + \varepsilon) \Delta F_{\text{roll}} \Delta_{\text{sp}}. \quad (7.8)$$

Les pôles du mode *Short Period* sont donc pôles de la fonction de transfert considérée. On a vu au cours du Chapitre 4 que la dynamique longitudinale de l'avion présente un pôle instable lorsque le centre de gravité est trop reculé vers l'arrière de l'appareil, alors qu'ils sont stables lorsque ce dernier est plus avancé. Il en résulte que la phase de la fonction de transfert est de  $-180^\circ$  lorsque le centre de gravité est placé vers l'arrière de l'avion, alors qu'elle est de  $0^\circ$  pour un centre de gravité placé suffisamment à l'avant.

Les moins bonnes marges ainsi obtenues pour les 63 configurations incertaines sont les suivantes : marge de gain positive de 14.8dB, marge de gains négative de  $-15.7\text{dB}$ , marge de phase de  $46.2^\circ$  et marge de retard de 56.1 ms.

**Évaluation des critères de performance** On évalue pour les 12 points de l'enveloppe de vol discrétisée les critères de performance classiques du système en boucle fermée que sont la position du pôle dominant, l'amortissement minimal et les marges de stabilité. Pour chaque critère, seul le plus mauvais résultat des 5 configurations de masse et de centrage est conservé. La constante de temps du pôle dominant est inférieure à 1.0 s pour 10 des 12 conditions de vol. Les deux conditions de vol restantes, correspondant à des vols à hautes altitudes et faibles vitesses, ont leur constante de temps inférieure à 1.33 s (Table 7.3). L'amortissement minimal du système en boucle fermée est supérieur à 0.55 pour l'ensemble des 12 conditions de vol (Table 7.4). La marge de phase du système est supérieure à  $40^\circ$  pour 10 des 12 conditions de vol, mais est légèrement inférieure à cette valeur pour les deux conditions de vol restantes correspondant à des vols à hautes altitudes et faibles vitesses pour des configurations extrêmes de masse et centrage (Table 7.5). La marge de gain est satisfaisante pour les 12 conditions de vol (Table 7.6), ainsi que la marge de retard qui est supérieure à 51.7 ms (Table 7.7).

## 7.2.2 Séquencement *a posteriori* des gains

### 7.2.2.1 Synthèse

En se basant sur les résultats obtenus dans la sous-section précédente, on cherche à procéder à un séquencement *a posteriori* des gains du contrôleur sous forme de fonctions polynomiales de l'altitude et du nombre de Mach. Pour cela, l'environnement `sftool` de MATLAB

Tableau 7.3 Synthèse préliminaire : partie réelle du pôle dominant

$h$ (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	-1.53	-1.92	-2.35	-2.72	-	-
5000	-	-1.18	-1.49	-1.81	-2.06	-
10000	-	-	-0.75	-0.87	-1.04	-1.24

Tableau 7.4 Synthèse préliminaire : amortissement minimal

$h$ (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	0.559	0.598	0.596	0.592	-	-
5000	-	0.616	0.617	0.615	0.612	-
10000	-	-	0.628	0.627	0.626	0.624

Tableau 7.5 Synthèse préliminaire : marge de phase minimale ( $^{\circ}$ )

$h$ (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	66.4	52.6	48.3	45.9	-	-
5000	-	41.8	44.58	46.19	45.5	-
10000	-	-	37.6	38.8	40.0	41.1

Tableau 7.6 Synthèse préliminaire : marge de gain minimale (dB)

$h$ (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	-15.5/17.9	-16.4/15.8	-15.3/15.5	-14.2/16.3	-	-
5000	-	-18.3/16.3	-16.9/15.2	-15.7/15.0	-14.8/15.0	-
10000	-	-	-18.2/17.3	-17.2/15.5	-16.5/14.6	-15.9/14.2

Tableau 7.7 Synthèse préliminaire : marge de retard minimale (ms)

$h$ (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	134	69.2	61.5	59.9	-	-
5000	-	57.4	56.5	57.2	55.4	-
10000	-	-	61.3	56.9	53.8	51.7

a été utilisé. Il permet, pour un polynôme d'ordre donné, de trouver les coefficients permettant de minimiser l'erreur entre le modèle et les données au sens des moindres carrés. Les *R-square* obtenus avec des polynômes d'ordres 1, 2 et 3 pour les coefficients  $K_i$ ,  $K_p$ ,  $K_q$ ,  $\omega_n^2$  et  $cf = 2\xi/\omega_n$  sont donnés dans le Tableau 7.8.

Tableau 7.8 Séquencement *a posteriori* des gains : valeur des *R-square*

Polynôme d'ordre \ Coefficient	$K_i$	$K_p$	$K_q$	$\omega_n^2$	$2\xi/\omega_n$
1	0.89	0.86	0.89	0.93	0.83
2	0.94	0.98	0.98	0.96	0.98
3	0.97	0.99	0.98	0.96	0.99

Ces résultats poussent à considérer des polynômes d'ordre 2. Ils permettent en effet de correctement capturer l'évolution des gains sur l'ensemble de l'enveloppe de vol, au contraire des polynômes d'ordre 1. Les polynômes d'ordre 3 conduisent quant à eux à une augmentation substantielle du nombre de coefficients utilisés dans le séquencement sans pour autant améliorer significativement le résultat. En exprimant l'altitude de vol en  $\text{km}^3$ , on obtient le séquencement *a posteriori* des gains suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i(h, M) = 64.77 - 102.1M + 3.530h + 38.92M^2 - 0.6316Mh - 0.2017h^2 \\ K_p(h, M) = 62.30 - 173.8M + 6.344h + 125.7M^2 - 8.033Mh + 0.0896h^2 \\ K_q(h, M) = -138.2 + 340.1M - 24.46h - 243.2M^2 + 26.94Mh - 0.3584h^2 \\ \omega_n^2(h, M) = 3433 - 1728M - 375.3h + 6765M^2 - 376.8Mh + 24.46h^2 \\ cf(h, M) = 0.0651 - 0.1736M + 0.0174h + 0.1427M^2 - 0.0224Mh + 0.000384h^2 \end{array} \right. \quad (7.9)$$

De manière à rendre le design le plus lisse et homogène possible, une dépendance polynomiale d'ordre 2 est également considérée pour la pulsation naturelle du modèle de référence  $\omega_{n,\text{ref}}$ . On obtient avec un *R-square* de 0.996, pour une altitude également exprimée en km, le modèle suivant :

$$\omega_{n,\text{ref}}(h, M) = -0.4655 + 9.099M - 0.1947h - 2.724M^2 - 0.271Mh + 0.00772h^2. \quad (7.10)$$

### 7.2.2.2 Analyse

Les normes  $H_\infty$  du contrôleur séquencé *a posteriori* ont été évaluées pour les 12 conditions de vol de la phase de synthèse préliminaire et sont résumées dans le Tableau 7.9. On obtient

---

3. Pour homogénéiser l'ordre de grandeur des coefficients des polynômes.



un maximum de 3.86, à comparer au maximum 1.48 obtenu dans la phase de synthèse préliminaire (Tab 7.2). La phase de séquençement a significativement dégradé les performances du contrôleur. Néanmoins, le contrôleur ainsi séquencé assure la stabilité du système bouclé pour les 12 points de l'enveloppe de vol discrétisée et les 5 configurations incertaines.

Tableau 7.9 Synthèse *a posteriori* : norme  $H_\infty$  obtenue pour chaque condition de vol

h (m) \ M	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	1.92	1.87	3.60	3.86	-	-
5000	-	1.97	1.53	1.89	2.15	-
10000	-	-	1.88	2.34	1.98	1.57

### 7.3 Synthèse d'un système de commandes de vol robuste et autoséquéncé

La phase préliminaire ayant été complétée avec succès, on envisage la synthèse du contrôleur robuste et autoséquéncé. Le contrôleur séquencé *a posteriori* obtenu lors de la synthèse préliminaire n'est pas optimal mais assure la stabilité du système en boucle fermée pour les 60 modèles considérés (12 points de vol pour 5 configurations de masse et de centrage). Il constitue alors une condition initiale toute indiquée pour la synthèse du contrôleur autoséquéncé. En effet, il est à noter que lors des quelques tests effectués avec une condition initiale aléatoire, la méthode de synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquéncé via `hinfstruct` n'a pas permis de stabiliser le système en boucle fermée. La stabilité des 60 modèles étant assurée de par le choix des gains du contrôleur séquencé *a posteriori* comme condition initiale, l'objectif de la synthèse *a priori* est d'ajuster les gains du contrôleur séquencé afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée. À cette fin, la fonction `hinfstruct` est utilisée pour ajuster les gains du contrôleur séquencé en venant minimiser simultanément les 60 modèles de la synthèse préliminaire.

#### 7.3.1 Transposition du problème de séquençement dans le formalisme $H_\infty$

En se basant sur les résultats du séquençement *a posteriori* des gains, on définit *a priori* le séquençement des gains sous la forme de fonctions quadratiques dépendant du Mach et de

l'altitude :

$$\begin{cases} K_i(h, M) = k_{i00} + k_{i10}M + k_{i01}h + k_{i20}M^2 + k_{i11}Mh + k_{i02}h^2 \\ K_p(h, M) = k_{p00} + k_{p10}M + k_{p01}h + k_{p20}M^2 + k_{p11}Mh + k_{p02}h^2 \\ K_q(h, M) = k_{q00} + k_{q10}M + k_{q01}h + k_{q20}M^2 + k_{q11}Mh + k_{q02}h^2 \\ \omega_n^2(h, M) = \omega_{n00}^2 + \omega_{n10}^2M + \omega_{n01}^2h + \omega_{n20}^2M^2 + \omega_{n11}^2Mh + \omega_{n02}^2h^2 \\ cf(h, M) = cf_{00} + cf_{10}M + cf_{01}h + cf_{20}M^2 + cf_{11}Mh + cf_{02}h^2 \end{cases} \quad (7.11)$$

La fonction *Roll-off* est réécrite pour des considérations pratiques en fonction des coefficients  $\omega_n^2$  et  $cf = 2\xi/\omega_n$  (7.12). L'avantage d'une telle réécriture provient du fait que les coefficients  $\omega_n^2$  et  $cf$  n'y apparaissent qu'une seule fois, au contraire de l'écriture classique faisant intervenir plusieurs fois la pulsation naturelle  $\omega_n$ .

$$F_{\text{roll}}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + cfs + s^2/\omega_n^2}. \quad (7.12)$$

Le problème de séquençement des gains est alors directement inclus dans le problème de synthèse. Pour cela, on injecte la structure des gains séquencés définie *a priori* dans l'architecture même du contrôleur (Fig. 5.7). Ceci est réalisé en remplaçant la fonction de transfert  $F_{\text{roll}}(s)$  par la Figure 7.8(a) et en substituant les 5 gains  $K_i$ ,  $K_p$ ,  $K_q$ ,  $\omega_n^2$  et  $cf$  par la Figure 7.8(b) avec les gains ajustables correspondants. Les 30 gains ajustables sont alors initialisés à partir du résultat de la synthèse préliminaire (7.9) avec l'environnement **realp** de MATLAB.

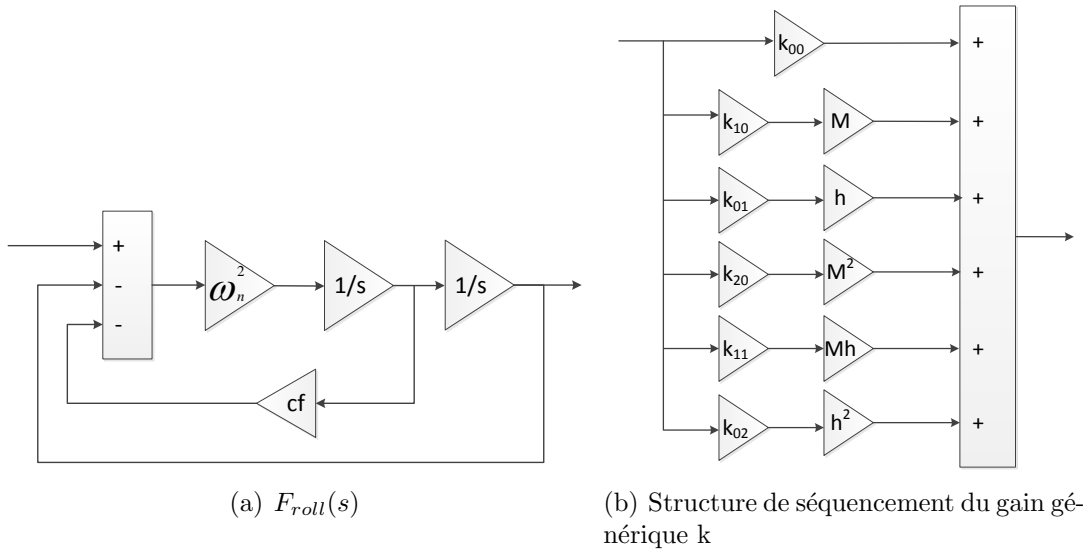


Figure 7.8 Intégration du problème de séquençement des gains dans l'architecture du contrôleur

La procédure décrite Section 6.3.3 pour la synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquenté est alors appliquée. Pour chaque point de vol  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq 12} \in \Theta$  et chaque configuration de masse et de centrage  $(\delta_j)_{1 \leq j \leq 5} \in \Delta$  de l'enveloppe de vol et du domaine incertain discrétisés (Fig. 7.4), on construit les matrices :

$$H_{j,l}(s) = \text{diag} \left[ (W_i T_i(s, \theta_l, \delta_j))_{i=1, \dots, 3} \right], \quad j = 1, \dots, 5, \quad l = 1, \dots, 12, \quad (7.13)$$

où la pulsation naturelle du modèle de référence  $\omega_{n,ref}$  est spécifiée en fonction de l'équation (7.10). Les contraintes  $H_{j,l}(s)$  sont alors concaténées en une unique contrainte généralisée  $H(s)$  afin d'être optimisée par `hinfstruct`. Cette structure regroupe les 180 contraintes  $H_\infty$  à partir desquelles est effectuée la synthèse du contrôleur robuste et autoséquenté par le réglage de 30 gains scalaires. Si l'on considère le pire cas rencontré lors de la synthèse préliminaire (Table 7.2), on cherche un contrôleur autoséquenté stabilisant les 60 modèles évalués et tel que  $\|H(s)\|_\infty < 1.48 + \varepsilon$  avec un  $\varepsilon$  aussi petit que possible pour satisfaire les contraintes  $H_\infty$ .

### 7.3.2 Synthèse du contrôleur robuste et autoséquenté

#### 7.3.2.1 Résultats

Les calculs ont été effectués sur un PC avec un processeur intel quad-core i7-2006K cadencé à 3.4 GHz, 8.0 Go de RAM et sous MATLAB 2012b. L'évolution de la norme  $H_\infty$  de  $H(s)$  est donnée en fonction du temps de calcul dans le Tableau 7.10.

Tableau 7.10 Synthèse *a priori* : évolution de la norme  $H_\infty$  de  $H(s)$

Nombre d'itérations	0	50	100	150	200	250	300	350	400
Temps de calcul cumulé en heures	0	19.7	43.0	70.0	93.4	120.2	145.0	169.7	203.8
$\ H(s)\ _\infty$	3.864	1.631	1.614	1.606	1.599	1.594	1.584	1.567	1.562

Un bon premier résultat est obtenu après 100 itérations et 43.0 heures d'exécution avec une norme de 1.61. Les itérations suivantes permettent de réduire lentement mais dans des proportions significatives la norme  $H_\infty$  de  $H(s)$ . Le calcul fut arrêté après 400 itérations et 203.8 heures de temps d'exécution. La norme  $H_\infty$  alors atteinte est de 1.56. Ce nombre est à comparer au pire cas de la synthèse préliminaire qui est de 1.48. Le faible différentiel montre que la minimisation a pu être correctement opérée sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Il

est également à comparer aux valeurs obtenues pour le séquençement de gains *a posteriori* (Tab 7.9), montrant que la synthèse *a priori* a permis de grandement améliorer le résultat de la minimisation sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Les gains obtenus à l'issu des 400 itérations, avec une altitude à nouveau exprimée en km, sont donnés par l'équation (7.14).

$$\begin{cases} K_i(h, M) = 60.56 - 60.75M - 0.4979h - 3.709M^2 + 3.585Mh - 0.1374h^2 \\ K_p(h, M) = 54.18 - 130.0M + 3.204h + 82.40M^2 - 3.702Mh + 0.0745h^2 \\ K_q(h, M) = -134.9 + 312.5M - 16.18h - 250.9M^2 + 21.64Mh - 0.4983h^2 \\ \omega_n^2(h, M) = 3425 - 1732M - 383.0h + 6763M^2 - 380.7Mh + 25.97h^2 \\ cf(h, M) = 0.1666 - 0.5286M + 0.0172h + 0.4687M^2 - 0.0279Mh + 0.000514h^2 \end{cases} \quad (7.14)$$

### 7.3.2.2 Réponses temporelles

On évalue la réponse temporelle du système en boucle fermée à un échelon de commande unitaire. On considère pour cela les 35 points de vols décrits à la Figure 7.9. Pour chacun de ces points, on trace les réponses associées pour la configuration nominale de masse et de centrage, ainsi que les 4 configurations extrêmes (Fig 7.4(b)).

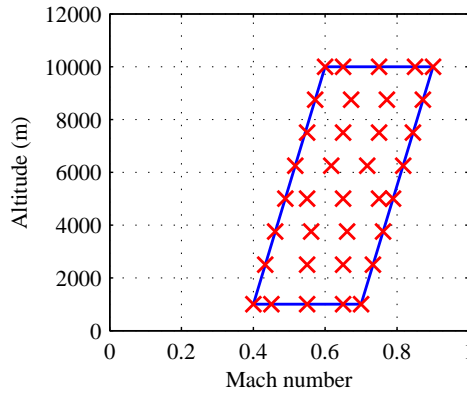


Figure 7.9 Répartition des 35 conditions de vols testées

La Figure 7.10 permet de valider le comportement temporel du système en boucle fermée. Le facteur de charge présente des temps de réponse inférieurs à 3.0s pour la majorité des conditions testées. Seuls les vols à basses vitesses et hautes altitudes donnent lieu à des temps de réponse de l'ordre de 4.0s. Les dépassements sont quant à eux bien inférieurs à 10% (Fig. 7.10(a)). Les vitesses en tangage présentent des dépassements légèrement inférieurs à 100% avec une vitesse en valeur absolue maximale de 8.1 °/s (Fig. 7.10(b)). Les débattements de la gouverne de profondeur autour de la position d'équilibre sont inférieurs en valeur absolue à 3.0 ° (Fig. 7.10(c)), pour une vitesse maximale de 20 °/s (Fig. 7.10(d)). En tenant

compte du fait que la position d'équilibre de la gouverne est de quelques degrés, ces débattements demeurent largement inférieurs aux limites de saturations en position et en vitesse de l'actionneur<sup>4</sup>.

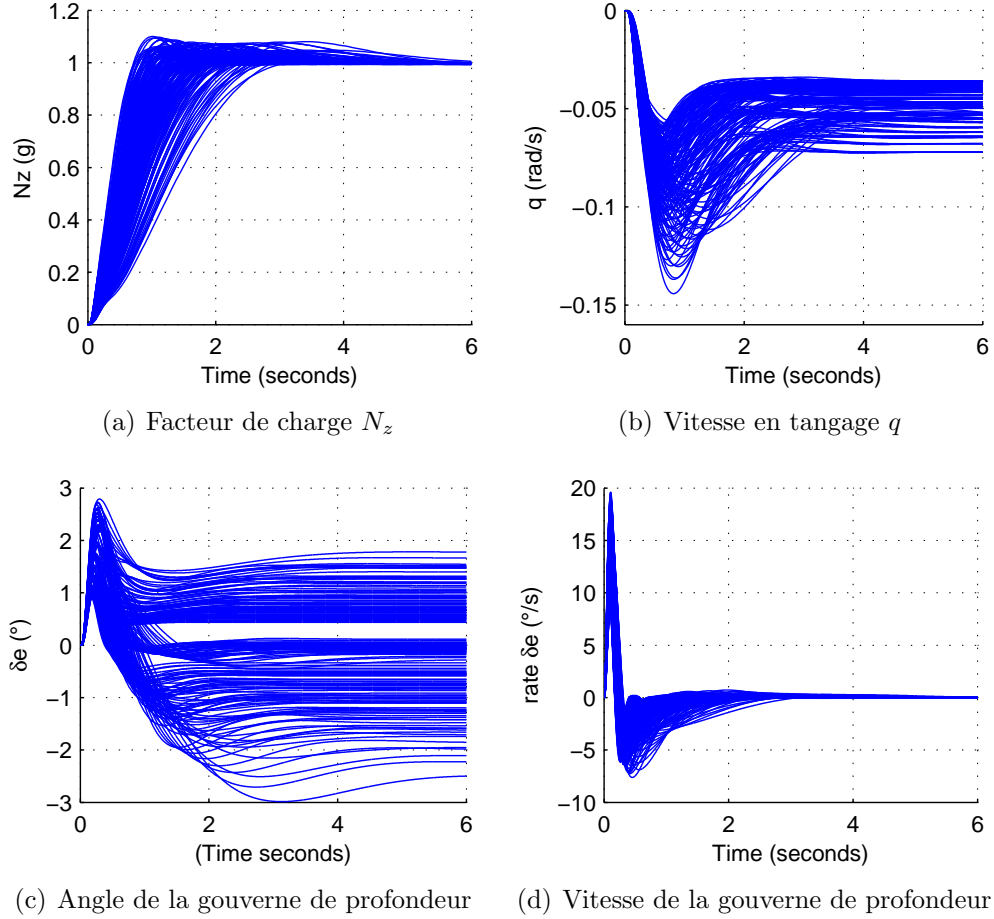


Figure 7.10 Synthèse *a priori* : réponses temporelles en boucle fermée pour 175 configurations

### 7.3.2.3 Position des pôles en boucle fermée

En se basant sur une discrétisation de l'enveloppe de vol en 70 points et une discrétisation du domaine incertain en 63 points, les pôles associés à ces 4410 systèmes en boucle fermée sont tracés à la Figure 7.11. On constate que pour l'ensemble des configurations testées, les pôles du système présentent un amortissement supérieur à 0.3. L'amortissement de 0.4 est vérifié pour la quasi-totalité des configurations testées. Seules les conditions de vol pour de hautes altitudes et de hautes vitesses à la limite de l'enveloppe de vol présentent un amortissement

4. On rappelle que les limites de débattements de la gouverne de profondeur sont de  $\pm 25^\circ$  pour une vitesse maximale de  $\pm 60^\circ/\text{s}$ .

inférieur à 0.4 pour des configurations extrêmes de masse et de centrage. L'amortissement de 0.5 est également vérifié pour une large majorité des configurations, excepté aux hautes altitudes et hautes vitesses. Notons également que pour l'ensemble des configurations testées, l'amortissement des pôles dominants demeure supérieur à 0.5.

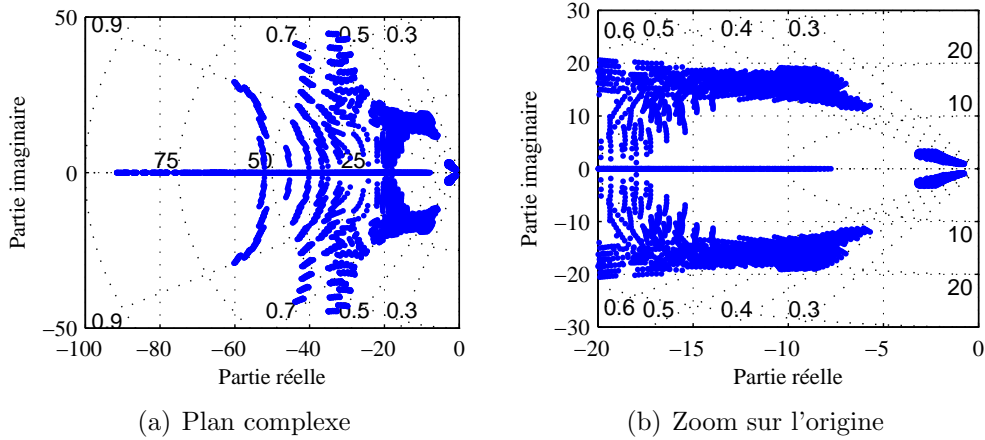


Figure 7.11 Synthèse *a priori* : placement des pôles en boucle fermée pour 4410 configurations

## 7.4 Approche normalisée

Dans l'approche précédente, les 12 points de vol considérés dans la synthèse présentent la même pondération au sein de la contrainte généralisée  $H(s)$ . Les résultats de la synthèse préliminaire du Tableau 7.2 montrent qu'une telle approche conduit à un effort de minimisation qui n'est alors pas uniforme sur l'enveloppe de vol. En effet, la contrainte de 1.56 obtenue lors de la synthèse du contrôleur autoséquenté assure un bon effort de minimisation à la fois pour les conditions de vol à faibles vitesses et pour celles à hautes altitudes. L'effort est beaucoup moins important pour les basses altitudes et hautes vitesses de vol. C'est par exemple le cas de la condition de vol ( $V_T = 0.7 \text{ M}$ ,  $h = 1000 \text{ m}$ ) pour laquelle la synthèse préliminaire permettait d'obtenir une minimisation de 1.14, largement inférieure au 1.55 de la synthèse *a priori*, conduisant à une possible relaxation des performances du contrôleur. Cette observation conduit à repenser l'approche en essayant de normaliser l'effort de minimisation à travers l'enveloppe de vol via le formalisme de l'optimisation multiobjectif.

### 7.4.1 Optimisation multiobjectif

#### 7.4.1.1 Formulation théorique

Les stratégies décrites à la Sous-Section 6.3.3 dans le cadre de la synthèse de contrôleurs robustes et autoséquencés peuvent être reformulées dans le cadre de l'optimisation multiobjectif (Marler et Arora (2004)). En effet, considérons pour une architecture de contrôle définie *a priori* le problème de synthèse d'un contrôleur autoséquencé. Pour cela, l'enveloppe de vol est discrétisée en un ensemble fini de points de fonctionnement  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq p} \in \Theta$ . Pour chaque point d'opération  $\theta_l$ , les contraintes  $H_\infty$  sont concaténées dans la contrainte généralisée  $H_l(s)$ . La minimisation de la norme infinie de chaque contrainte généralisée  $H_l(s)$  par **hinfstruct** conduit à l'évaluation numérique du gain optimal  $\gamma_l$  tel que :

$$\gamma_l = \min_{K \in \mathbb{K}} \|H_l(s)\|_\infty, \quad (7.15)$$

où  $\mathbb{K}$  dénote l'ensemble des contrôleurs  $K$  respectant l'architecture définie *a priori*.

Considérons à présent la synthèse du contrôleur robuste et autoséquencé avec un séquençement des gains défini *a priori*. On définit la fonction multiobjectif  $F = [F_1, \dots, F_p]^\top$  :

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{K}_{\text{GS}} \rightarrow \mathbb{R}^p \\ K &\rightarrow [\|H_1(s)\|_\infty, \dots, \|H_p(s)\|_\infty]^\top, \end{aligned} \quad (7.16)$$

où  $\mathbb{K}_{\text{GS}}$  représente l'ensemble des contrôleurs autoséquencés respectant à la fois l'architecture de contrôle et la structure de séquençement définies *a priori*. En se basant sur le résultat (7.15), on introduit le *point utopique*  $\Gamma^0 = [\gamma_1, \dots, \gamma_p]^\top$ . Ce point représente la valeur minimale atteignable par la fonction multiobjectif  $F$  lorsque l'on considère ses composantes une à une de manière indépendante. On obtient alors dans le cadre du contrôleur autoséquencé que  $\forall \theta \in \Theta, \Gamma^0 \leq F(\theta)$ , où par définition :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \leq v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i \leq v_i.$$

En règle générale, le point utopique  $\Gamma^0$  n'est pas atteignable. L'approche classique consiste alors à trouver une solution qui est aussi proche que possible de  $\Gamma^0$ . Il est à noter que la notion de proximité nécessite ici d'être définie, en fonction du problème considéré. Notons également que le choix de différentes métriques mènera généralement à des solutions différentes. Une telle solution, notées  $K^*$ , est dite *optimale au sens de Pareto*, i.e. qu'il n'existe pas un autre

$K \in \mathbb{K}_{\text{GS}}$  tel que  $F(K) \leq F(K^*)$  et  $F_l(K) < F_l(K^*)$  pour au moins un  $l \in \{1, \dots, p\}$ . Dans le cadre du calcul par ordinateur, les solutions numériques fournies par les algorithmes de minimisation multiobjectif peuvent conduire à des solutions qui ne sont pas Pareto optimales mais *faiblement optimales au sens de Pareto*, i.e. il n'existe par un autre  $K \in \mathbb{K}_{\text{GS}}$  tel que  $F(K) < F(K^*)$ .

La technique de synthèse d'un contrôleur robuste et autoséquenté décrite à la Sous-Section 6.3.3 se résume au calcul d'une solution faiblement Pareto optimale pour la fonction multiobjectif  $F$  via la minimisation de la contrainte généralisée  $H(s)$ . En effet :

$$\min_{K \in \mathbb{K}_{\text{GS}}} \|H(s)\|_{\infty} = \min_{K \in \mathbb{K}_{\text{GS}}} \max_{1 \leq l \leq p} F_l(K). \quad (7.17)$$

De plus, on a alors via le point utopique que :

$$\max_{1 \leq l \leq p} \gamma_l \leq \min_{K \in \mathbb{K}_{\text{GS}}} \|H(s)\|_{\infty}. \quad (7.18)$$

L'effort de minimisation de  $H(s)$  est donc limité par la plus mauvaise performance obtenue pour chaque point d'opération  $\theta_l$  lorsque ces derniers sont considérés individuellement. On retrouve ici le résultat observé numériquement, à savoir que l'effort de minimisation n'est pas uniforme à travers l'enveloppe de vol. Alors que les points d'opération pour lesquels  $\gamma_l$  est élevé sont bien optimisés, ceux pour lesquels  $\gamma_l$  est plus faible voient leurs performances significativement dégradées.

Afin de remédier à cette non-uniformité de l'effort de minimisation, il est intéressant de chercher à calculer des solutions faiblement Pareto optimales alternatives. Pour cela, en se basant sur des considérations physiques ou des résultats préliminaires, il est possible d'introduire des coefficients de pondération afin de donner plus de poids dans la synthèse à certains sous-domaines du domaine d'opération. Pour cela, des coefficients de pondération  $(P_l)_{1 \leq l \leq p} \in ]0, 1]^l$  sont injectés dans le problème d'origine pour résoudre numériquement le problème suivant :

$$\min_{K \in \mathbb{K}_{\text{GS}}} \max_{1 \leq l \leq p} P_l F_l(K). \quad (7.19)$$

Un contrôleur minimisant (7.19) peut alors être calculé par **hinfstruct** via la minimisation de la contrainte généralisée :

$$H(s) = \text{diag} \left[ (P_l H_l(s))_{l=1, \dots, p} \right]. \quad (7.20)$$



Dans ces conditions, les solutions faiblement Pareto optimales calculées par **hinfstruct** dépendent des coefficients de pondération utilisés dans la synthèse. L'ajustement de ces coefficients permet alors de jouer sur les performances du système en boucle fermée à travers l'enveloppe de vol.

#### 7.4.1.2 Application

On applique ici les résultats de la synthèse  $H_\infty$  structurée dans le cadre l'optimisation multiobjectif via l'introduction de coefficients de pondération au contrôle du mode *Short Period* du F-16. On introduit pour les 12 conditions de vol  $\theta_l$  considérées (Fig. 7.4(a)) le gain  $\gamma_l$  (7.15) obtenu lors de la synthèse préliminaire (Tab. 7.2). De manière à uniformiser l'effort de minimisation à travers l'enveloppe de vol, une stratégie naturelle est d'introduire les coefficients de pondération :

$$P_l = \frac{1}{\gamma_l}, \quad l \in \{1, \dots, 12\},$$

et de minimiser la contrainte généralisée (7.20) associée. On cherche ainsi à trouver un contrôleur stabilisant internement le système tel que  $\|H(s)\|_\infty < 1 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  le plus petit possible. De cette manière, on obtient que pour chaque point de vol  $\theta_l$  :  $\|H_l(s)\|_\infty < (1 + \varepsilon) \gamma_l$ .

L'évolution de la norme  $H_\infty$  de la contrainte généralisée et pondérée  $H(s)$  est donnée dans le Tableau 7.11 en fonction du temps de calcul. La norme  $H_\infty$  de la contrainte  $H_l(s)$  est donnée dans le Tableau 7.12 pour chacun des 12 points de vol  $\theta_l$ . En comparant les résultats au 1.56 obtenu précédemment, on constate une amélioration du résultat de minimisation pour les vols à hautes vitesses et basses altitudes, mais une dégradation pour ceux à basses vitesses et hautes altitudes. Les gains obtenus à l'issu des 400 itérations sont donnés par (7.21).

Tableau 7.11 Synthèse *a priori* normalisée 1 : évolution de la norme  $H_\infty$  de  $H(s)$

Nombre d'itérations	0	50	100	150	200	250	300	350	400
Temps de calcul cumulé en heures	0	27.6	57.6	69.1	100.6	120.7	148.8	173.5	196.6
$\ H(s)\ _\infty$	3.389	1.243	1.192	1.180	1.175	1.162	1.148	1.141	1.140

Tableau 7.12 Synthèse *a priori* normalisée 1 : norme  $H_\infty$  de  $H_l(s)$ 

$h \text{ (m)} \backslash M$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	1.64	1.46	1.32	1.30	-	-
5000	-	1.65	1.54	1.46	1.43	-
10000	-	-	1.69	1.68	1.65	1.61

$$\begin{cases} K_i(h, M) = 65.67 - 71.51M - 1.773h - 1.133M^2 + 4.435Mh - 0.06180h^2 \\ K_p(h, M) = 50.01 - 108.9M + 2.096h + 60.54M^2 - 2.396Mh + 0.09442h^2 \\ K_q(h, M) = -150.1 + 318.8M - 10.38h - 216.9M^2 + 14.88Mh - 0.6542h^2 \\ \omega_n^2(h, M) = 3422 - 1733M - 385.3h + 6762M^2 - 381.4Mh + 27.03h^2 \\ cf(h, M) = 0.6214 - 1.885M + 0.0332h + 1.463M^2 - 0.0496Mh + 0.000559h^2 \end{cases} \quad (7.21)$$

#### 7.4.2 Ajustement automatisé des coefficients de pondération

L'introduction de coefficients de pondération vise à mieux répartir l'effort de minimisation à travers l'ensemble de l'enveloppe de vol. Dans ce cadre, l'ajustement des coefficients de pondération doit être effectué de manière à obtenir le meilleur compromis possible. Cela passe généralement par la mise en place de méthodes *ad hoc* qui sont coûteuses en temps de calcul. Afin d'éviter de telles procédures, on propose ici une méthode permettant d'automatiser le réglage des coefficients de pondération en injectant directement le processus d'ajustement de ces derniers dans la phase de synthèse.

##### 7.4.2.1 Formulation théorique

De manière à automatiser la procédure d'ajustement des coefficients de pondération, on définit une famille de fonctions de pondération continues  $(P_l : [0, 1]^w \rightarrow ]0, 1])_{1 \leq l \leq p}$  satisfaisant un ensemble de contraintes non triviales :

$$f_{i_c}(P_1, \dots, P_p) = 0, \quad i_c = 1, \dots, n_c, \quad (7.22)$$

où  $f_{i_c} : ]0, 1]^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $f_{i_c}^{-1}(\{0\})$  est de mesure nulle (au sens de la mesure de Lebesgue) pour tout  $i_c \in \{1, \dots, n_c\}$ . Ces contraintes visent à formuler des phénomènes de compensation entre les pondérations des différents points de fonctionnement  $(\theta_l)_{1 \leq l \leq p} \in \Theta$ . L'objectif est alors de résoudre le problème suivant :

$$\min_{(x, K) \in [0, 1]^w \times \mathbb{K}_{\text{GS}}} \max_{1 \leq l \leq p} P_l(x) F_l(K). \quad (7.23)$$

Ce problème est alors formulé dans le cadre de la synthèse  $H_\infty$  structurée via la contrainte généralisée :

$$H(s) = \text{diag} \left[ (P_l H_l(s))_{l=1, \dots, p} \right], \quad (7.24)$$

où  $H_l$  dépend des gains ajustables du contrôleur et où  $P_l$  est fonction d'un vecteur de paramètres  $x \in [0, 1]^w$ . La fonction **hinfstruct** est alors utilisée pour ajuster à la fois les gains du contrôleur et le vecteur de paramètres  $x$  afin de minimiser  $\|H(s)\|_\infty$ . Notons que l'obtention d'un résultat satisfaisant par une telle méthode nécessite de choisir soigneusement les fonctions de pondération  $(P_l)_{1 \leq l \leq p}$ .

#### 7.4.2.2 Application

L'automatisation de l'ajustement des coefficients de pondération est appliqué au cas du contrôle du mode *Short Period* du F-16. On définit tout d'abord les bornes inférieures et supérieures admissibles pour les coefficients de pondération :

$$1/\gamma_l \leq P_l \leq 1,$$

où l'on rappelle que les gains  $\gamma_l$  sont définis par (7.15) et ont été obtenus lors de la synthèse préliminaire (Tab. 7.2). Ces bornes assurent que :

$$1 \leq \|P_l H_l\|_\infty \leq \|H_l\|_\infty.$$

On met alors en place la stratégie suivante. En renumérotant les 12 conditions de vol de la façon suivante :

$$\gamma_{12} \leq \gamma_{11} \leq \dots \leq \gamma_2 \leq \gamma_1,$$

on associe pour tout  $l \in \{1, \dots, 6\}$  les conditions de vol  $\theta_l$  et  $\theta_{13-l}$  via l'introduction des coefficients de pondération :

$$\begin{cases} P_l = \frac{1}{1 + (\gamma_l - 1)x_l} \times \frac{1}{4x_l(1 - x_l)} \\ P_{13-l} = \frac{1}{\gamma_{13-l} + (1 - \gamma_{13-l})x_l} \times \frac{1}{4x_l(1 - x_l)} \end{cases}, \quad l = 1, \dots, 6$$

où  $\{x_1, \dots, x_6\} \in [0, 1]^6$  sont 6 paramètres ajustables. Cette définition se justifie par la volonté d'équilibrer la pondération entre les conditions de vol pour lesquelles  $\gamma_l$  est grand avec ceux pour lesquelles  $\gamma_l$  est plus petit. De plus, les dépendances entre les pondérations ont été choisies de telle sorte que lorsque  $P_l$  est proche de  $1/\gamma_l$ ,  $P_{13-l}$  est proche de 1 et inversement. De manière à éviter que les valeurs des coefficients de pondération ne se rapprochent trop des

limites  $1/\gamma_l$  et 1, on introduit une fonction de type puits de potentiel :  $1/(4x_l(1 - x_l))$ . De la sorte, on s'assure que les paramètres de pondération  $x_1, \dots, x_6$  ne se rapprocheront pas trop des bornes 0 et 1. L'objectif est alors de minimiser la contrainte généralisée  $H(s)$  (7.24) en ajustant de manière simultanée les 30 gains du contrôleur autoséquentiel et les 6 paramètres d'ajustement des pondérations.

La norme  $H_\infty$  de la contrainte généralisée  $H(s)$  atteint la valeur 1.360 après 400 itérations. L'analyse de ce résultat semble indiquer que le point ainsi obtenu est une solution Pareto optimale locale, mais n'a pas pu converger vers une solution Pareto optimale globale. L'évolution des paramètres d'ajustement des pondérations au fil des itérations est tracée à la Figure 7.12. Les paramètres d'ajustement voient leur valeur évoluer dans un intervalle resserré autour de 0.5, semblant indiquer qu'il n'y a pas de gain substantiel à se rapprocher des bornes de l'intervalle  $[0, 1]$  et qu'un bon compromis se situe aux alentours de la valeur 0.5.

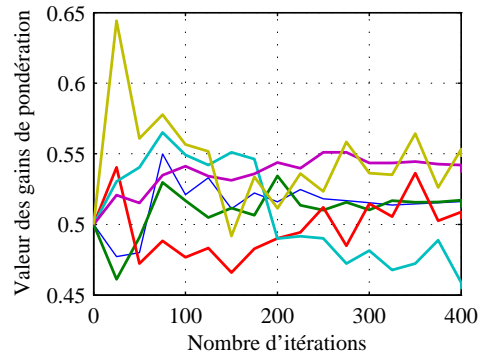


Figure 7.12 Évolution des paramètres d'ajustement des pondérations au fil des itérations

Ces résultats conduisent à considérer le cas des coefficients de pondération :

$$P_l = 2/(\gamma_l + 1), \quad l = 1, \dots, 12,$$

afin de mieux répartir l'effort de minimisation à travers l'enveloppe de vol. L'évolution de la norme  $H_\infty$  de la contrainte généralisée associée à ces pondérations  $H(s)$  est donnée dans le Tableau 7.13 en fonction du temps de calcul. La norme  $H_\infty$  de la contrainte  $H_l(s)$  est donnée dans le Tableau 7.14 pour chacun des 12 points de vol  $\theta_l$ . La comparaison avec le Tableau 7.12 montre que l'introduction d'une normalisation plus souple permet d'obtenir, en terme de normes  $H_\infty$ , de meilleurs résultats pour les vols à hautes altitudes et basses vitesses, tout en conservant de bonnes performances pour les vols à hautes vitesses et basses altitudes. Les gains obtenus à l'issue des 400 itérations sont donnés par (7.25).

Tableau 7.13 Synthèse *a priori* normalisée 2 : évolution de la norme  $H_\infty$  de  $H(s)$ 

Nombre d'itérations	0	50	100	150	200	250	300	350	400
Temps de calcul cumulé en heures	0	28.1	43.7	61.7	82.3	104.2	129.1	158.9	182.2
$\ H(s)\ _\infty$	3.611	1.413	1.373	1.349	1.342	1.339	1.328	1.319	1.304

Tableau 7.14 Synthèse *a priori* normalisée 2 : norme  $H_\infty$  de  $H_l(s)$ 

$h$ (m) \ $M$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1000	1.59	1.46	1.41	1.39	-	-
5000	-	1.58	1.51	1.48	1.46	-
10000	-	-	1.61	1.61	1.59	1.57

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i(h, M) = 58.46 - 51.16M - 1.616h - 14.24M^2 + 4.382Mh - 0.07964h^2 \\ K_p(h, M) = 45.10 - 96.37M + 2.180h + 52.77M^2 - 2.322Mh + 0.08005h^2 \\ K_q(h, M) = -142.3 + 309.7M - 11.80h - 225.6M^2 + 17.46Mh - 0.6560h^2 \\ \omega_n^2(h, M) = 3420 - 1734M - 386.4h + 6762M^2 - 382.2Mh + 27.12h^2 \\ cf(h, M) = 0.3544 - 1.088M + 0.0203h + 0.8815M^2 - 0.0322Mh + 0.000480h^2 \end{array} \right. \quad (7.25)$$

## 7.5 Performances des contrôleurs autoséquencés

Cette partie décrit, en se basant sur une discrétisation de l'enveloppe de vol et du domaine incertain, les performances du système en boucle fermée pour les différents contrôleurs autoséquencés. Pour chacun des critères considérés, et pour chaque point de vol évalué, seule la plus mauvaise performance observée sur l'ensemble du domaine incertain est retenue pour l'élaboration des graphes. Il est à noter que les résultats ici présentés ne permettent pas de prouver la stabilité du système de manière continue sur l'enveloppe de vol  $\Theta$  (Fig. 5.5) et le domaine incertain  $\Delta$  (5.10). Ils permettent néanmoins d'avoir une idée précise des performances du système en boucle fermée. Les performances du contrôleur séquencé *a posteriori* sont décrites aux Figures 7.13 et 7.14. Les caractéristiques du contrôleur autoséquencé sont données aux Figures 7.15 et 7.16 pour l'approche non normalisée, aux Figures 7.17 et 7.18 pour la première approche normalisée et aux Figures 7.19 et 7.20 pour la seconde approche normalisée.

### 7.5.1 Contrôleur séquencé *a posteriori*

Le contrôleur séquencé *a posteriori* permet de stabiliser le système sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain. Le temps de réponse est inférieur à 3.0s sur la majorité de l'enveloppe de vol, excepté pour les vols à hautes altitudes et faibles vitesses pour lesquels il demeure plus petit que 4.0s (Fig. 7.13(a)). L'amortissement minimal du système en boucle fermée est supérieur à 0.3 comme imposé par le cahier des charges (Fig. 7.13(b)). Les contraintes concernant la marge de gain sont respectées (Fig. 7.14(a) et 7.14(b)). La marge de phase est inférieure aux  $40^\circ$  imposés par le cahier des charges pour les vols à hautes altitudes et basses vitesses (Fig. 7.14(c)). La marge de retard est quand à elle supérieure à 45 ms (Fig. 7.14(d)).

L'objectif de la synthèse *a priori* est de venir optimiser les gains du contrôleur de telle sorte à améliorer les performances du système en boucle fermée à travers l'enveloppe de vol. Les principaux points que l'on souhaite ici améliorer sont les suivants :

- position du pôle dominant : améliorer le temps de réponse du système en boucle fermée, en particulier pour les vols à basses altitudes et hautes vitesses ;
- amortissement : accroître la valeur minimale de l'amortissement sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et augmenter les aires des sous-domaines de vol pour lesquels l'amortissement est supérieur à 0.5 et 0.6 ;
- marge de phase : réduire le sous-domaine de l'enveloppe de vol pour lequel la marge de phase est inférieure à  $40^\circ$ .

### 7.5.2 Contrôleur autoséquencé

Le système est stable sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain. La constante de temps du système est inférieure à 1.0s sur la majorité de l'enveloppe de vol, excepté pour les vols à hautes altitudes et faibles vitesses pour lesquels elle demeure plus petite que 1.33s (Fig. 7.15(a)). L'amortissement minimal du système en boucle fermée est légèrement inférieur à 0.4 (Fig. 7.15(b)). Les contraintes concernant la marge de gain sont respectées (Fig. 7.16(a) et 7.16(b)). La marge de phase est supérieure à  $40^\circ$  sur la quasi-totalité de l'enveloppe de vol (Fig. 7.16(c)). La marge de retard est quant à elle supérieure à 40 ms (Fig. 7.16(d)).

Ce résultat illustre bien l'intérêt de la synthèse du contrôleur séquencé *a priori* afin d'améliorer les performances du contrôleur séquencé *a posteriori*. Cela a en effet permis d'améliorer le temps de réponse du système en boucle fermée, en particulier pour les vols à basses alti-

tudes et hautes vitesses. L'amortissement minimal à travers l'enveloppe de vol a été amélioré passant de 0.3 à 0.4 et les zones pour lesquelles l'amortissement est supérieur à 0.5 et 0.6 ont été considérablement étendues. La marge de gain positive a été légèrement améliorée pour les basses vitesses mais légèrement dégradée pour les hautes vitesses, respectant néanmoins le cahier des charges. Pour finir, la marge de phase a été significativement améliorée sur l'ensemble de l'enveloppe de vol, réduisant le sous-domaine pour lequel sa valeur est inférieure à  $40^\circ$ .

### 7.5.3 Contrôleur autoséquenté - normalisation 1

Les résultats de la première approche normalisée sont comparés aux résultats du premier contrôleur autoséquenté. Le système est stable sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain avec globalement le même comportement de la constante de temps du pôle dominant (Fig. 7.17(a)). L'amortissement est amélioré pour les vols à basses altitudes et hautes vitesses mais significativement réduit pour les hautes altitudes et basses vitesses (Fig. 7.17(b)). La marge de gain positive est significativement accrue sur l'ensemble de l'enveloppe de vol (Fig. 7.18(a)). La marge de gain négative est légèrement réduite mais demeure conforme aux contraintes du cahier des charges (Fig. 7.18(b)). La marge de phase est améliorée pour les basses altitudes et hautes vitesses (Fig. 7.18(c)). Néanmoins, sa valeur chute en dessous des  $40^\circ$  requis pour de faibles vitesses de vol. La marge de retard est quant à elle légèrement accrue, atteignant les 45 ms (Fig. 7.18).

Comme attendu, ce contrôleur a permis d'améliorer les performances du système en boucle fermée pour les basses altitudes et hautes vitesses de vol. Néanmoins, de par une normalisation trop forte, il a conduit à une très nette dégradation des performances pour les basses vitesses et hautes altitudes, en particulier en ce qui concerne les critères d'amortissement et de marge de phase.

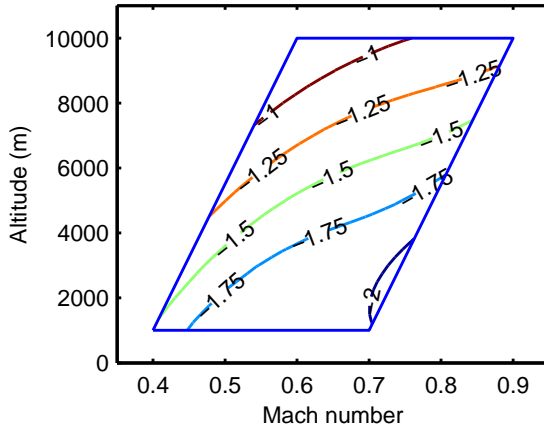
### 7.5.4 Contrôleur autoséquenté - normalisation 2

Les résultats de la seconde approche normalisée sont comparés aux résultats des deux premières approches. Le système est stable sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain avec globalement le même comportement de la constante de temps du pôle dominant (Fig. 7.19(a)). Les résultats en terme d'amortissement montrent que la seconde approche normalisée constitue un bon compromis entre le premier contrôleur autoséquenté et celui obtenu par la première approche normalisée (Fig. 7.19(b)). L'amortissement est ainsi supérieur à 0.4 sur la quasi-totalité de l'enveloppe de vol et est supérieur à 0.6 sur une large

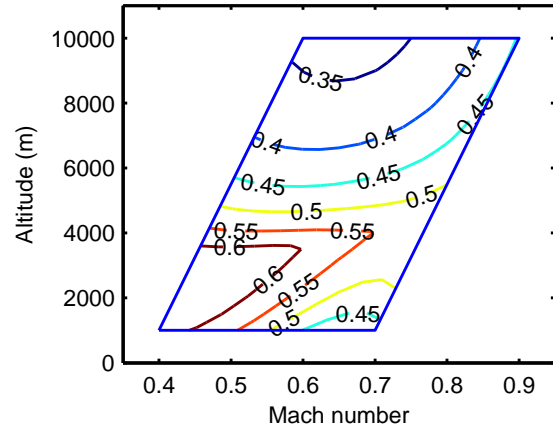
partie centrale. Les marges de gain sont similaires à celles obtenues avec la première approche normalisée (Fig. 7.18(a) et Fig. 7.18(b)). La marge de phase est significativement améliorée relativement à la première approche normalisée pour les basses altitudes et hautes vitesses, la plaçant au delà des  $40^\circ$  sur la quasi-totalité de l'enveloppe de vol (Fig. 7.18(c)). La marge de retard est quant à elle maintenue au-delà des 45 ms (Fig. 7.20).

Ce contrôleur constitue donc un bon compromis. Il permet, comparativement à l'approche non normalisée, d'améliorer les performances du système en boucle fermée pour les basses altitudes et hautes vitesses de vol, tout en maintenant un bon niveau de performances pour les basses vitesses et hautes altitudes.

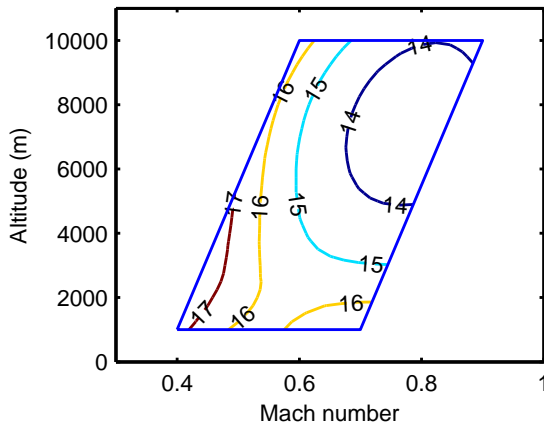




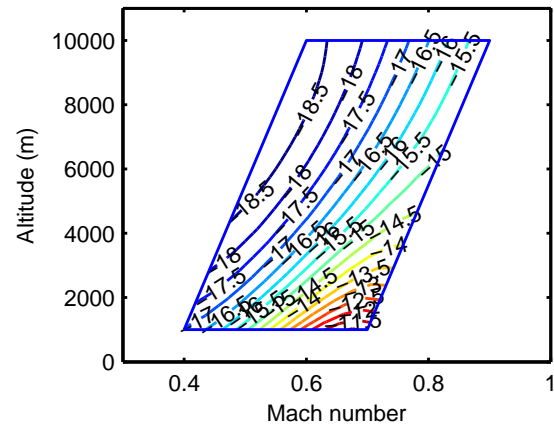
(a) Partie réelle du pôle dominant



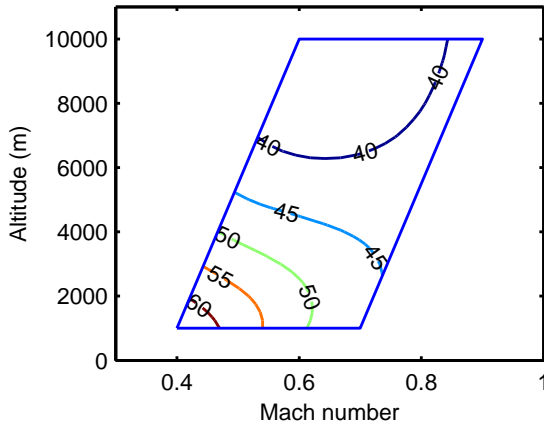
(b) Amortissement

Figure 7.13 Contrôleur séquencé *a posteriori* : caractéristiques modales

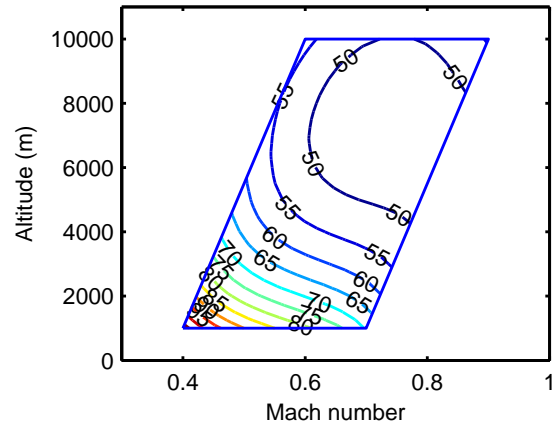
(a) Marge de gain positive (dB)



(b) Marge de gain négative (dB)

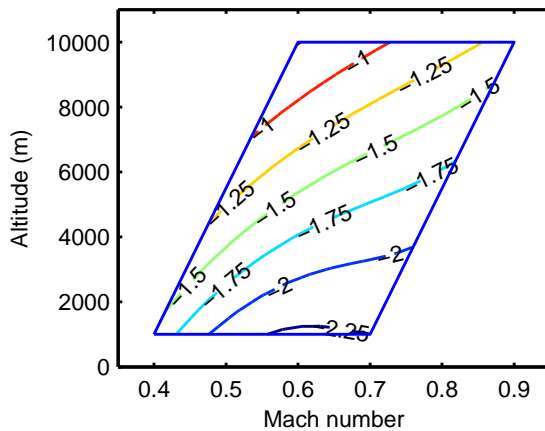


(c) Marge de phase (°)

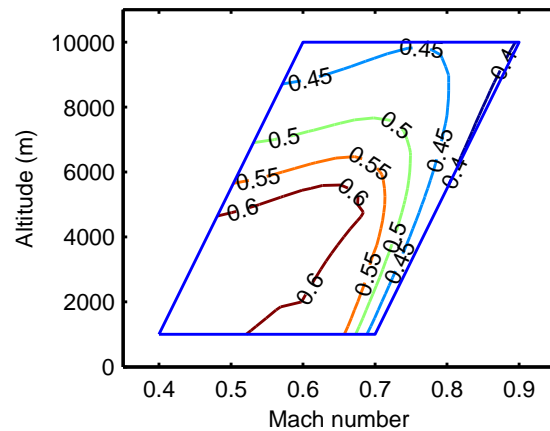


(d) Marge de retard (ms)

Figure 7.14 Contrôleur séquencé *a posteriori* : marges de stabilité

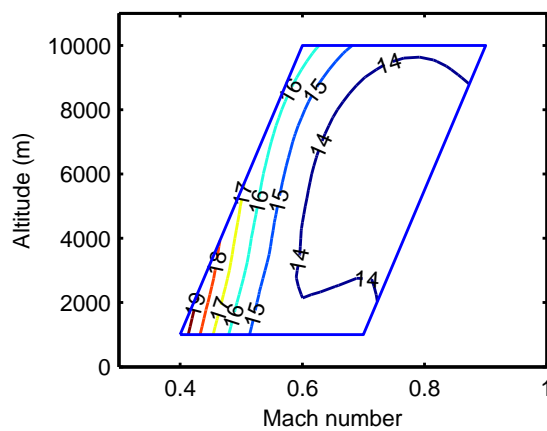


(a) Partie réelle du pôle dominant

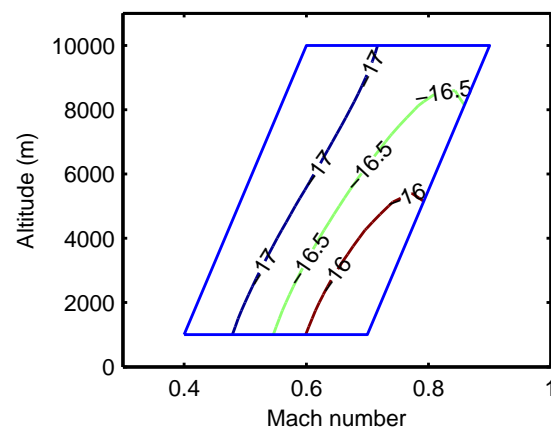


(b) Amortissement

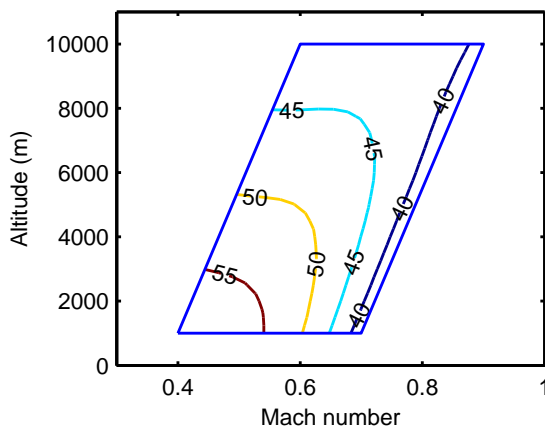
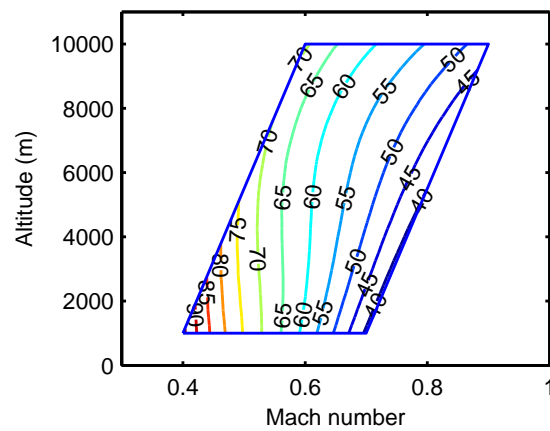
Figure 7.15 Contrôleur autoséquenté : caractéristiques modales



(a) Marge de gain positive (dB)



(b) Marge de gain négative (dB)

(c) Marge de phase ( $^{\circ}$ )

(d) Marge de retard (ms)

Figure 7.16 Contrôleur autoséquenté : marges de stabilité

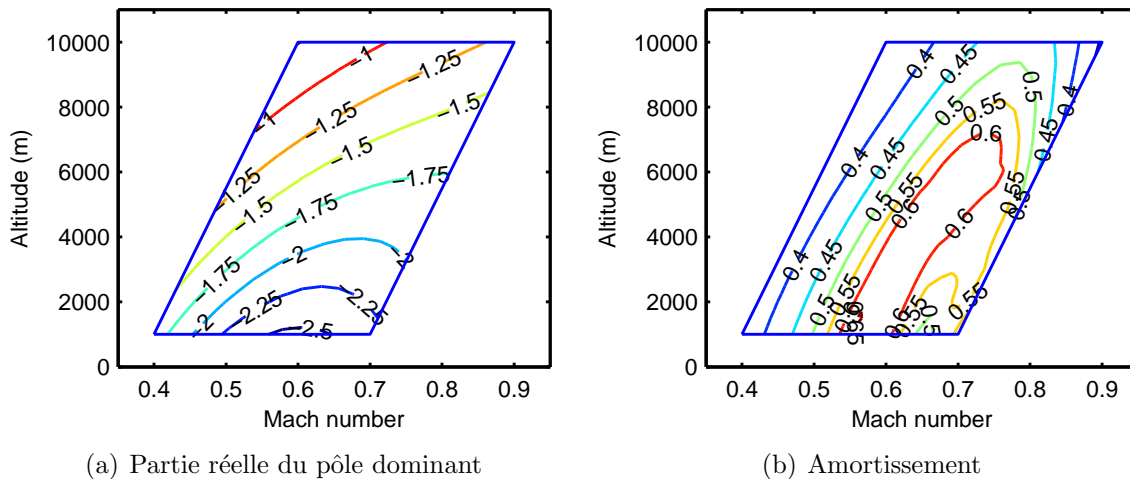


Figure 7.17 Contrôleur autoséquenté - normalisation 1 : caractéristiques modales

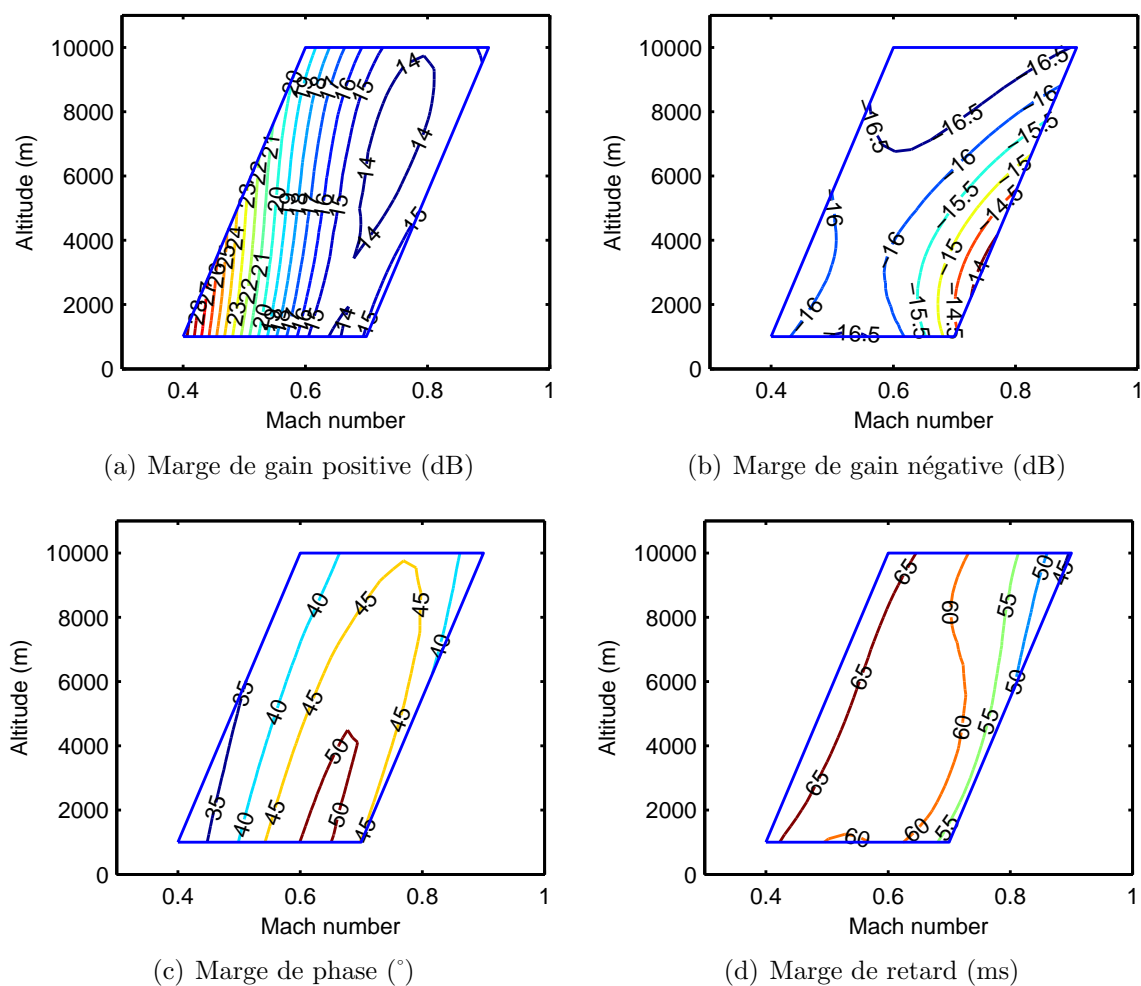


Figure 7.18 Contrôleur autoséquenté - normalisation 1 : marges de stabilité

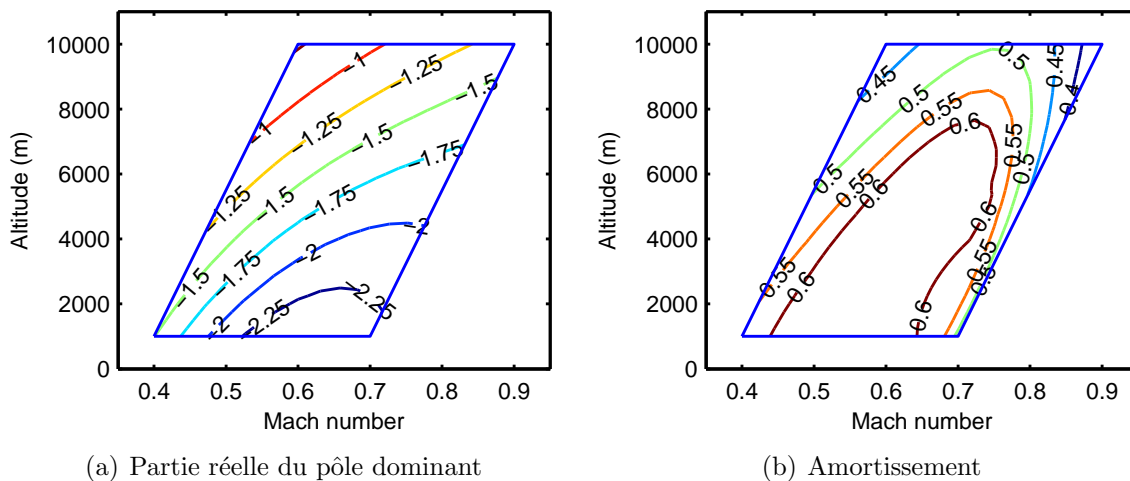


Figure 7.19 Contrôleur autoséquenté - normalisation 2 : caractéristiques modales

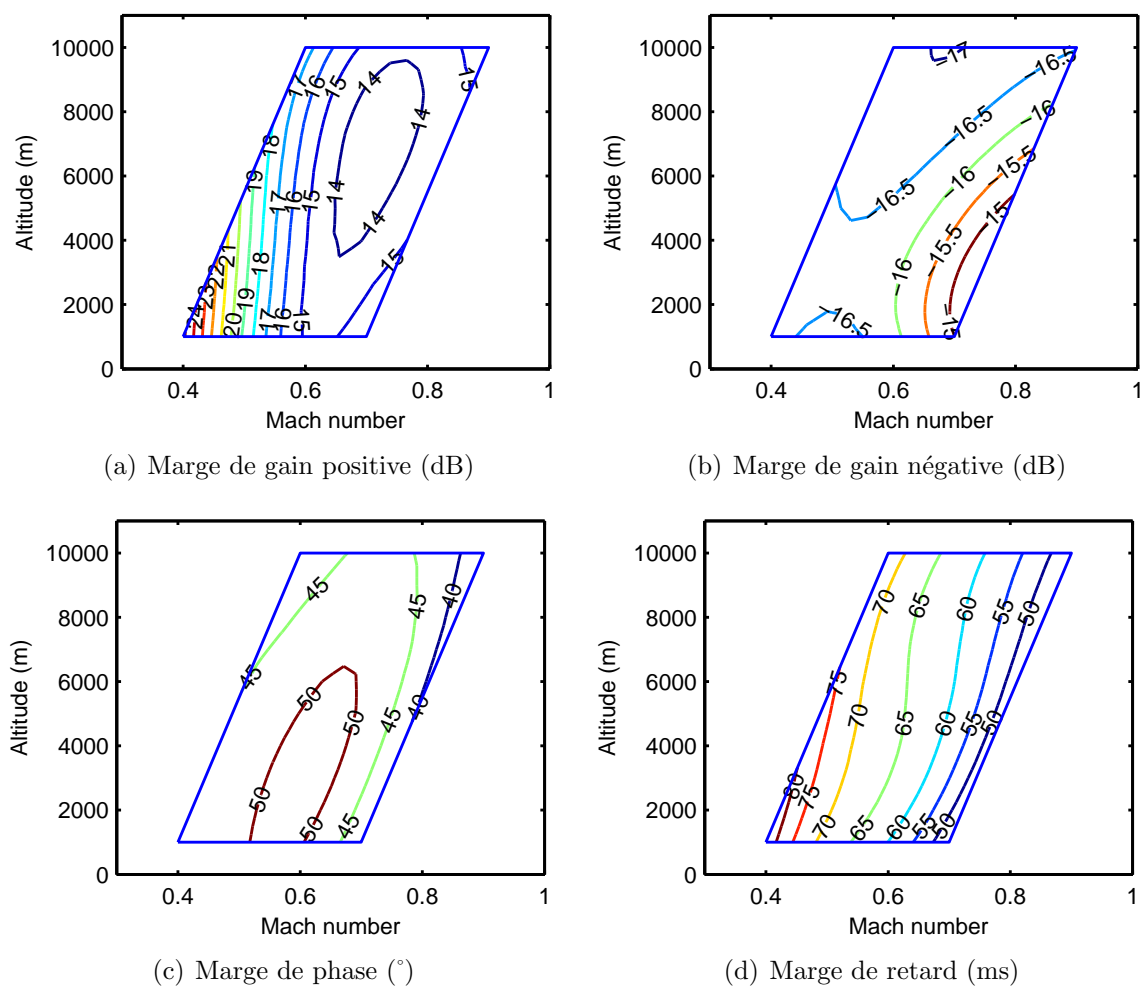


Figure 7.20 Contrôleur autoséquenté - normalisation 2 : marges de stabilité

## CHAPITRE 8

### VALIDATION DU SYSTÈME DE COMMANDES DE VOL

Le Chapitre 7 a permis de synthétiser avec succès des contrôleurs autoséquencés à travers l'enveloppe de vol. Les premières analyses effectuées sur le modèle linéarisé et en se basant sur des discrétisations de l'enveloppe de vol et du domaine incertain tendent à montrer le bon comportement du système en boucle fermée. Elles ne permettent néanmoins pas de garantir le bon comportement du système sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain. De plus, la masse et le centrage ne sont pas les seuls paramètres incertains à considérer. En particulier, les coefficients aérodynamiques et le moment d'inertie  $I_y$  ne sont généralement connus qu'avec une précision de  $\pm 10\%$ . Une phase de validation est donc indispensable pour prouver la stabilité et les performances robustes du système quant aux incertitudes portant sur les paramètres de masse et de centrage, mais également vis-à-vis des paramètres aérodynamiques.

Parmi les différentes techniques de validation couramment utilisées dans l'industrie aéronautique (Varga *et al.* (2011)), mentionnons :

- les simulations temporelles du système en boucle fermée pour le système non linéaire complet via une procédure de type tirage de Monte-Carlo (Fernandes de Oliveira et Puyou (2011)) ;
- l'étude de la stabilité et des performances robustes (modales, fréquentielles et marges de stabilité (Deodhare et Patel (1998); Bates *et al.* (2003))) du système LTI à travers l'emploi de techniques de  $\mu$ -analyse (Fan *et al.* (1991)) ;
- la mise en œuvre de méthodes probabilistes afin de rechercher les plus mauvaises conditions de vol et combinaisons des paramètres incertains pour lesquels les critères de performance sont les plus faibles (Fielding *et al.* (2002)) ;
- l'étude de la stabilité du système à travers la recherche de fonctions de Lyapounov (Dasgupta *et al.* (1994); Dettori et Scherer (2000)) ;
- la mise en place de méthodes de type IQC afin d'étudier la stabilité et les performances du système LPV (Megretski et Rantzer (1997)) ;
- les méthodes visant à déterminer pour une configuration donnée le *worst-case pilot input* (Forssell (2003); Menon *et al.* (2006)) ;

On se focalise ici sur la validation du système en boucle fermée avec le contrôleur autosé-

quencé obtenu avec l'approche non normalisée (7.14). Deux validations sont envisagées : LTI et LPV (Biannic *et al.* (2006)). La première consiste à faire l'hypothèse simplificatrice que les paramètres de séquençement que sont l'altitude et le nombre de Mach, ainsi que les constantes physiques de l'avion tels que les paramètres de masse et de centrage sont stationnaires. La deuxième validation, plus réaliste, consiste à prouver la stabilité du système lorsque certains de ces paramètres varient dans le temps.

La Section 8.1 étudie la stabilité et les performances robustes du système pour des conditions de vol et des paramètres incertains stationnaires. La Section 8.2 s'attache quant à elle à étudier la stabilité robuste du système en boucle fermée pour des conditions de vol variant dans le temps. La Section 8.3 est finalement consacrée à l'étude des réponses temporelles du système en boucle fermée sur le modèle non linéaire complet de l'avion.

## 8.1 Robustesse LTI

On se place dans un premier temps dans le cas de figure où à la fois la condition de vol et les paramètres incertains sont stationnaires. Le système en boucle fermée peut alors être vu comme étant une collection continue de modèles LTI dont on cherche à prouver la stabilité et les performances. En d'autres termes, il s'agit de prouver le bon comportement du système en chacun des points de l'enveloppe de vol et pour chaque valeur admissible des paramètres incertains dont les plages de variations sont listées dans le Tableau 8.1.

Tableau 8.1 Plages de variation des paramètres incertains

Paramètre	$m$	$\Delta x$	$I_y$	$Z_\alpha$	$Z_q$	$Z_{\delta_e}$	$M_\alpha$	$M_q$	$M_{\delta_e}$
Plage	$\pm 1$ t	$\pm 4.35\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$	$\pm 10\%$

Dans cette approche, les paramètres de séquençement ainsi que les paramètres incertains sont supposés stationnaires. Il est évident que cette hypothèse est largement mise en défaut lorsque l'on considère la dynamique réelle de l'avion. Bien que la dynamique d'évolution de la vitesse de l'avion soit faible devant celle du *Short Period*, elle ne peut être rigoureusement considérée comme constante lors de la réponse à court terme de l'avion. Les paramètres de masse (masse, position du centre de gravité et valeur de la matrice d'inertie) évoluent lentement au cours du vol du fait de la consommation de carburant. Ils peuvent également évoluer très rapidement lors d'un éventuel largage de matériel. Ces phénomènes, susceptibles de déstabiliser l'avion, ne sont pas couverts par l'analyse de robustesse LTI. Cette analyse ne sera donc pas suffisante pour garantir le bon fonctionnement du système en boucle fermée, mais en est une condition

nécessaire. En effet, si l'analyse de robustesse LTI échoue, une nouvelle phase de synthèse est alors nécessaire. De plus, l'analyse LTI présente les avantages d'une complexité moindre et d'un conservatisme réduit vis-à-vis des méthodes d'analyse LPV. Dans le cas de figure où l'analyse LTI est concluante, des analyses LPV seront mises en œuvre pour compléter la phase de validation.

### 8.1.1 $\mu$ -analyse

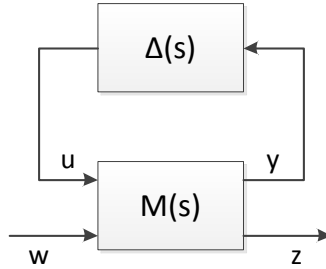


Figure 8.1 Interconnexion  $M$ - $\Delta$

La  $\mu$ -analyse (Doyle (1982)) est un puissant outil d'étude de la stabilité et des performances robustes des systèmes LTI. Elle est basée sur le formalisme de la représentation LFT de la Figure 8.1. Dans cette représentation,  $M(s)$  est le modèle du système nominal et  $\Delta(s)$  représente l'ensemble des paramètres incertains normalisés, i.e.  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$ , pour lesquels on cherche à évaluer la stabilité et les performances du système.

On décompose  $M(s)$  de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} Y(z) \\ Z(z) \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} U(z) \\ W(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(z) \\ W(z) \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

La fonction de transfert de l'interconnexion  $M$ - $\Delta$  est alors donnée sous la forme d'une LFT supérieure :

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_u(M(s), \Delta(s)) = M_{22}(s) + M_{21}(s)\Delta(s)(I - M_{11}(s)\Delta(s))^{-1}M_{12}(s). \quad (8.2)$$

Rappelons que la valeur singulière structurée (ssv)  $\mu$  est définie comme suit (Doyle (1982)) :

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\inf_{\Delta \in \Delta} \{\bar{\sigma}(\Delta) / \det(I - M\Delta) = 0\}}, \quad (8.3)$$

où  $\Delta$  est constitué de l'ensemble des matrices incertaines structurées  $\Delta$  de norme  $H_\infty$  inférieure ou égale à 1 et dont la structure est conforme à celle obtenue lors de l'écriture du système sous la forme de l'interconnexion  $M$ - $\Delta$  de la Figure 8.1.

#### 8.1.1.1 Stabilité robuste

En supposant que le système est nominalelement stable, les incertitudes ne pourront introduire des instabilités qu'à travers le terme  $(I - M_{11}(s)\Delta(s))^{-1}$ . On cherche alors à évaluer l'amplitude de la plus petite incertitude  $\Delta$  rendant l'interconnexion  $M$ - $\Delta$  à la limite de l'instabilité, i.e. tel que  $(I - M_{11}(s)\Delta(s))^{-1}$  présente un pôle imaginaire pur. Le théorème est alors le suivante :

**Théorème 8.1 (Critère de stabilité robuste)** *Supposons que  $M(s)$  est stable. Le système de la Figure 8.1 est stable pour toute perturbation  $\Delta \in \Delta$  vérifiant  $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$  si et seulement si :*

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} \mu_\Delta(M_{11}(j\omega)) < 1/\beta. \quad (8.4)$$

#### 8.1.1.2 Performances modales robustes

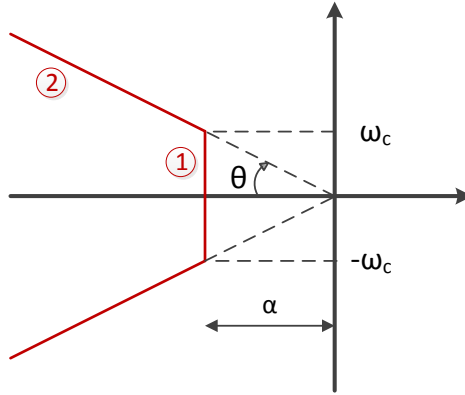


Figure 8.2 Cône de performance  $\mathcal{D}_{\alpha, \xi}$

La  $\mu$ -analyse peut être mise à profit afin d'étudier la robustesse des performances modales des systèmes incertains (Varga *et al.* (2011)). Considérons le domaine  $\mathcal{D}_{\alpha, \xi}$  du plan complexe délimité par les pôles de partie réelle inférieure à  $-\alpha$  et d'amortissement supérieur à  $\xi$  illustré à la Figure 8.2 où  $\xi = \cos(\theta)$ . Supposons que le système est nominalelement  $\mathcal{D}_{\alpha, \xi}$ -stable. On cherche alors à déterminer l'amplitude de la plus petite incertitude rendant le système  $\mathcal{D}_{\alpha, \xi}$ -instable. En d'autres termes, on cherche l'amplitude de la plus petite incertitude  $\Delta$  telle que  $(I - M_{11}(s)\Delta(s))^{-1}$  présente un pôle à la frontière du domaine  $\mathcal{D}_{\alpha, \xi}$ .



La nature de la frontière du domaine  $\mathcal{D}_{\alpha,\xi}$  conduit à effectuer la  $\mu$ -analyse en deux étapes, afin de vérifier qu'aucun pôle ne présente :

- une partie réelle égale à  $-\alpha$  sur le Segment 1 :  $s = -\alpha + j\omega$  pour  $\omega \leq \omega_c$  ;
- un amortissement égal à  $\xi$  sur le Segment 2 :  $s = jz\omega$  pour  $\omega \geq \omega_c$ .

où  $\omega_c = \alpha\sqrt{1/\xi^2 - 1}$  et  $z = 1 + j/\sqrt{1/\xi^2 - 1}$ . En notant  $(A, B, C, D)$  une représentation d'état de  $M_{11}(s)$ , on obtient par translation et rotation du plan complexe que :

- segment 1 :  $M_{11}^1(s) = M_{11}(-\alpha + s)$  dont une représentation d'état est donnée par  $(A + \alpha I, B, C, D)$  ;
- segment 2 :  $M_{11}^2(s) = M_{11}(zs)$  dont une représentation d'état est donnée par  $(A/z, B/\sqrt{z}, C/\sqrt{z}, D)$ .

**Théorème 8.2 (Performances modales robustes)** *Supposons que  $M(s)$  est  $\mathcal{D}_{\alpha,\xi}$ -stable. Le système de la Figure 8.1 est  $\mathcal{D}_{\alpha,\xi}$ -stable pour toute perturbation  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  vérifiant  $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$  si et seulement si :*

$$\max \left[ \sup_{\omega \in [0, \omega_c]} \mu_{\mathbf{\Delta}}(M_{11}^1(j\omega)) , \sup_{\omega \in [\omega_c, +\infty[} \mu_{\mathbf{\Delta}}(M_{11}^2(j\omega)) \right] < 1/\beta. \quad (8.5)$$

### 8.1.1.3 Performances fréquentielles robustes

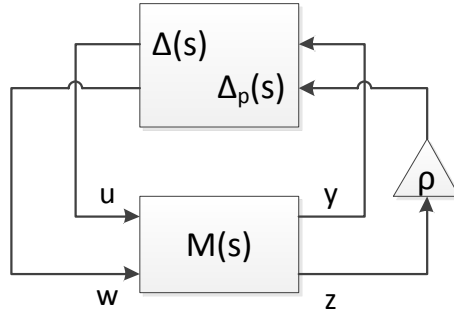


Figure 8.3 Interconnexion  $M$ - $\Delta$  pour l'analyse de performances robustes

La  $\mu$ -analyse permet également d'étudier la robustesse des performances  $H_\infty$  du système. Pour cela, il suffit de reboucler les sorties régulées  $z$  sur les entrées exogènes  $w$  comme indiqué à la Figure 8.3 où  $\rho$  est un réel strictement positif et  $\Delta_p$  une matrice complexe quelconque vérifiant  $\|\Delta_p\|_\infty \leq 1$ .

En notant  $\tilde{\mathbf{\Delta}}$  l'ensemble des matrices de la forme  $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\Delta, \Delta_p)$  avec  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  et  $\Delta_p$  matrice

complexe de norme  $H_\infty$  inférieure ou égale à 1, on a le résultat suivant :

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} \mu_{\tilde{\Delta}}(\text{diag}(I, \rho I) M(j\omega)) < 1 \implies \forall \Delta \in B_{\Delta}, \|\mathcal{F}_u(M(s), \Delta)\|_\infty \leq 1/\rho. \quad (8.6)$$

### 8.1.2 Application et résultats

De manière à prouver la stabilité du F-16 en boucle fermée sur l'ensemble de l'enveloppe de vol,  $\Delta$  est non seulement constitué des paramètres incertains, mais également des paramètres de séquençement que sont le nombre de Mach et l'altitude de vol :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_{\text{seq}}, \Delta_{\text{masse}}, \Delta_{\text{aero}}), \quad (8.7)$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta_{\text{seq}} = \text{diag}(\Delta_M I_M, \Delta_h I_h) \\ \Delta_{\text{masse}} = \text{diag}(\Delta_m I_m, \Delta_{\Delta x} I_{\Delta x}, \Delta_{I_y} I_{I_y}) \\ \Delta_{\text{aero}} = \text{diag}(\Delta_{Z_\alpha} I_{Z_\alpha}, \Delta_{Z_q} I_{Z_q}, \Delta_{Z_{\delta_e}} I_{Z_{\delta_e}}, \Delta_{M_\alpha} I_{M_\alpha}, \Delta_{M_q} I_{M_q}, \Delta_{M_{\delta_e}} I_{M_{\delta_e}}) \end{cases}$$

où  $\Delta_M$  et  $\Delta_h$  sont les variables de séquençement normalisées,  $\Delta_m I_m, \dots, \Delta_{M_{\delta_e}}$  sont les paramètres incertains normalisés et  $I_M, \dots, I_{M_{\delta_e}}$  sont des matrices identité dont les dimensions correspondent aux nombres d'occurrences des différents paramètres. Le système en boucle fermée prend alors la forme de la Figure 8.4 où  $W$  est un filtre de pondération de l'erreur de suivi.

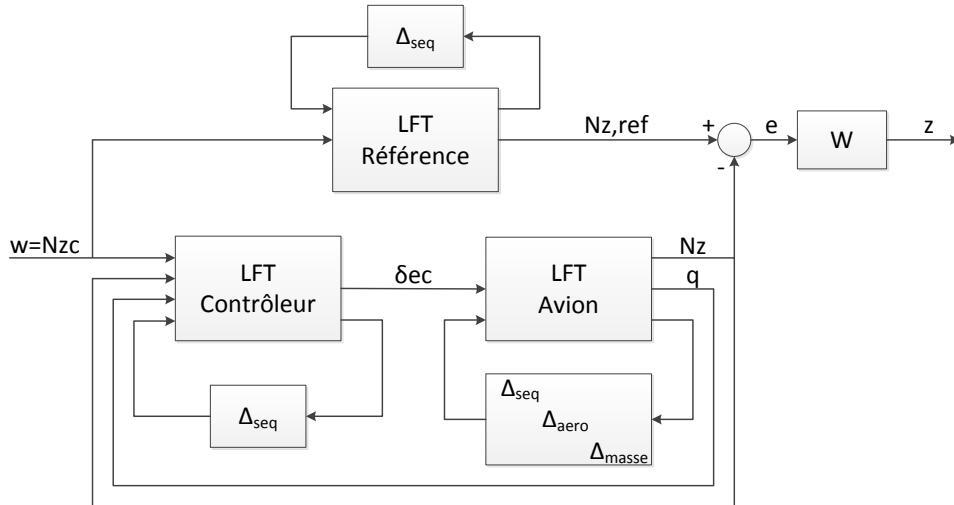


Figure 8.4 Structure de l'interconnexion des LFT du système en boucle fermée

### 8.1.2.1 Obtention des modèles LFT

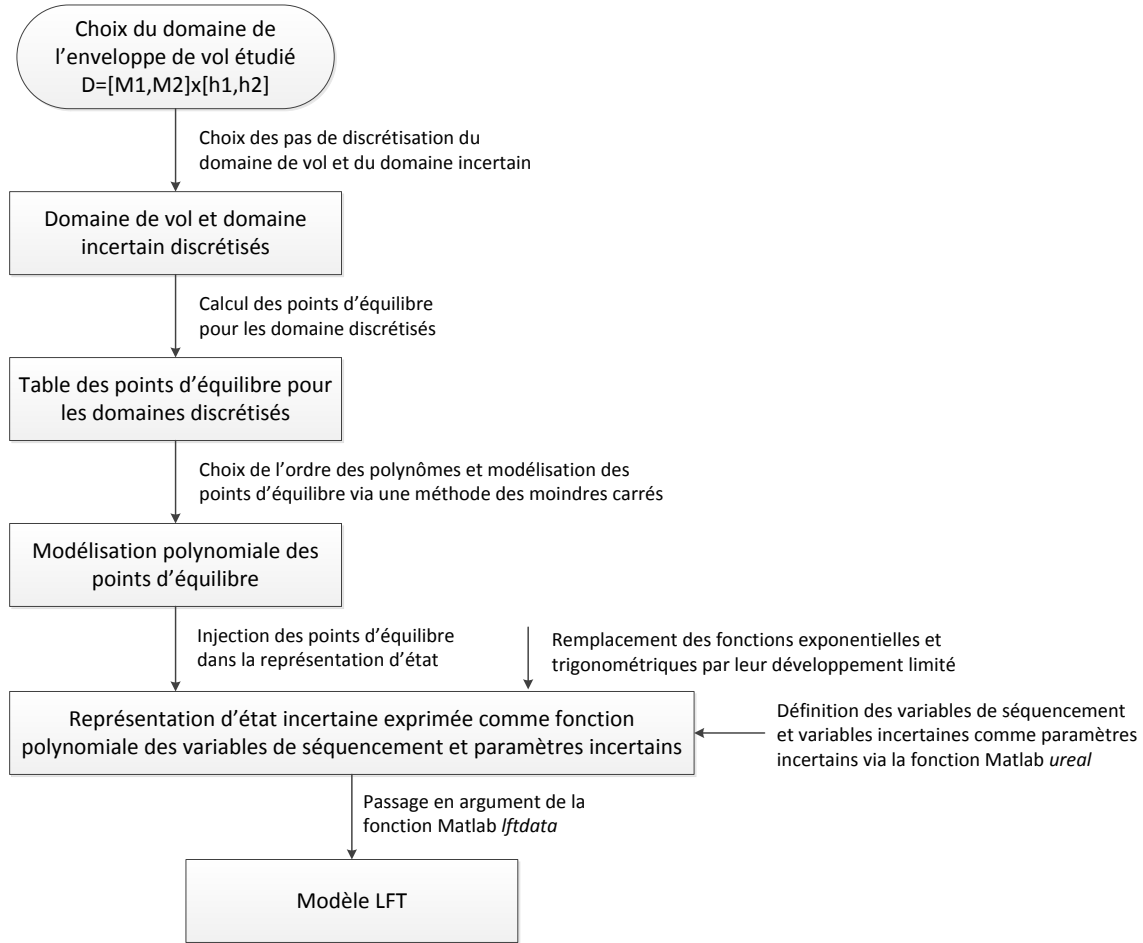


Figure 8.5 Procédure d'obtention du modèle LFT pour la  $\mu$ -analyse

La première étape consiste à mettre le système sous la forme d'une LFT supérieure telle que montrée à la Figure 8.1 avec un bloc  $\Delta$  normalisé (8.7). La procédure utilisée est illustrée à la Figure 8.5 et est décrite plus en détails ci-dessous.

1. Choix du sous-domaine de l'enveloppe de vol  $\mathcal{D} = [M_1, M_2] \times [h_1, h_2]$  pour lequel on souhaite obtenir une modélisation sous forme LFT.
2. Discrétisation du domaine de vol  $\mathcal{D}$  et du domaine incertain constitué des paramètres de masse et de centrage (5.10).
3. Calcul des points d'équilibre associés aux deux domaines discrétisés.
4. À partir des points d'équilibre ainsi obtenus, mise en place d'une modélisation des points d'équilibre sous la forme de fonctions polynomiales des variables de séquençement et des

paramètres incertains. Ceci est réalisé via une technique de minimisation des moindres carrés à travers la fonction MATLAB `lsqnonlin`.

5. Définition des variables de séquençement et paramètres incertains dans MATLAB via la fonction `ureal`. Celle-ci permet de définir les différentes variables à analyser durant la  $\mu$ -analyse et qui constituent le bloc incertain  $\Delta$ . On spécifie ainsi le nom de la variable incertaine, sa valeur nominale et ses variations.
6. Les points d'équilibre modélisés sous forme polynomiale sont alors exprimés en fonction des variables incertaines décrites au point précédent et sont injectés dans la représentation d'état du système en boucle fermée. De manière à obtenir une représentation d'état incertaine dont la dépendance vis-à-vis des paramètres incertains est polynomiale, les fonctions trigonométriques, ainsi que les fonctions exponentielles intervenant dans le modèle de l'atmosphère, ont été remplacées par leur développement limité. Les erreurs introduites par ces approximations ont été minimisées en choisissant adéquatement l'ordre des développements limités et ont été prises en compte dans la  $\mu$ -analyse de par l'amplitude des incertitudes portant sur les coefficients aérodynamiques.
7. Finalement, le modèle d'état incertain est passé en argument de la fonction MATLAB `lftdata` qui normalise les incertitudes et renvoie en sortie le modèle  $M(s)$  et la structure de  $\Delta$  de l'interconnexion  $M$ - $\Delta$ . On obtient ainsi un modèle LFT du système valable sur le sous-domaine  $\mathcal{D}$  de l'enveloppe de vol.

Notons que de manière à obtenir des LFT d'ordres réduites, des algorithmes de simplification algébrique (Hecker *et al.* (2005); Hecker et Varga (2006)) ont été utilisés à travers l'activation de l'option `full` en argument de la fonction `ureal`.

La procédure décrite précédemment peut permettre d'obtenir un modèle  $M(s)$  valable sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Une telle approche conduit néanmoins à devoir considérer des polynômes modélisant les points d'équilibre de l'avion dont le degré est élevé. Cela a pour conséquence d'accroître la dimension du bloc  $\Delta$  et donc la complexité du problème. De manière à éviter l'explosion des temps de calcul lors de la  $\mu$ -analyse, on préférera donc subdiviser l'enveloppe de vol en une multitude de petites régions sur lesquelles des polynômes d'ordre réduit (ordre 1 ou 2) permettront de modéliser convenablement les points d'équilibre. Pour l'évaluation de la stabilité et des performances modales robustes, la représentation d'état (5.18) a été utilisée. Les complexités des modèles LFT ainsi obtenus sont données dans le Tableau 8.2. On y donne en fonction du degré des polynômes utilisés pour modéliser les points d'équilibre le nombre d'occurrences des différents paramètres constituant  $\Delta$ . Globalement, les domaines de vol à basses vitesses (zone 1 sur la Fig. 8.6) ont nécessité le recours à des polynômes de degré 2 pour modéliser  $\delta_{e,e}$  et des polynômes de degré 1 pour modéliser  $\alpha_e$ .

À l'inverse, les domaines de vol à hautes vitesses et basses altitudes (zone 2) ont nécessité respectivement des polynômes de degré 1 et de degré 2. Les domaines de vol restant (zone 3) ont nécessité quant à eux des polynômes de degré 1.

Tableau 8.2 Complexités des modèles LFT pour l'analyse de stabilité robuste

$\alpha_{eq}$	$\delta_{e,eq}$	$\Delta_M$	$\Delta_h$	$\Delta_m$	$\Delta_{\Delta x}$	$\Delta_{I_y}$	$\Delta_{Z_\alpha}$	$\Delta_{Z_q}$	$\Delta_{Z_{\delta_e}}$	$\Delta_{M_\alpha}$	$\Delta_{M_q}$	$\Delta_{M_{\delta_e}}$
1	1	105	162	72	82	32	3	3	3	9	7	4
1	2	157	206	111	126	33	3	3	3	9	7	5
2	1	258	300	188	224	33	3	3	3	9	3	9

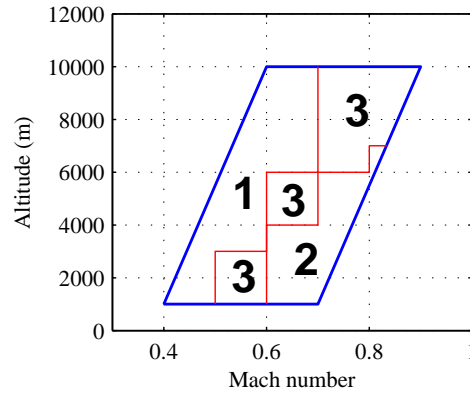


Figure 8.6 Découpage de l'enveloppe de vol en 3 parties à des fins de modélisation des points d'équilibre

### 8.1.2.2 Stabilité robuste

L'étude de stabilité robuste a été menée en subdivisant l'enveloppe de vol en 39 sous-domaines. Pour chacun de ces sous-domaines, une  $\mu$ -analyse a été réalisée et les courbes correspondantes sont tracées à la Figure 8.7. La valeur maximale de  $\mu$  est strictement inférieure à 0.51 et est limitant pour les vols à basses vitesses. Le système est donc stable sur l'ensemble de l'enveloppe de vol pour toutes les configurations incertaines vérifiant  $\|\Delta\|_\infty \leq 1.96$ . Cela assure que l'avion est stable pour des variations :

- de la masse de  $\pm 1960$  kg ;
- du centrage de  $\pm 8.52\%$  ;
- du moment d'inertie  $I_y$  de  $\pm 19.6\%$  ;
- des coefficients aérodynamiques de  $\pm 19.6\%$ .

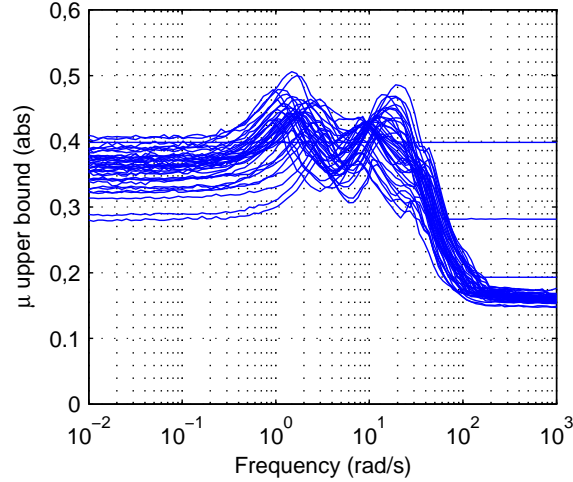


Figure 8.7  $\mu$ -analyse : résultat pour la stabilité robuste sur l'ensemble de l'enveloppe de vol

Il est à noter que les résultats obtenus sont conservateurs, résultant de l'inclusion des variables de séquençement dans le bloc d'incertitudes  $\Delta$ . En effet, pour chaque sous-domaine de l'enveloppe de vol testé, rien n'indique que la plus petite perturbation déstabilisant le système se situe ou non dans ce sous-domaine, à l'extérieur duquel la modélisation des points d'équilibre n'est plus valide. De plus, les marges de stabilité limitantes ont été obtenues pour les basses vitesses de l'enveloppe de vol. De ce fait, rien n'assure que la plus petite perturbation  $\Delta$  détectée par la  $\mu$ -analyse venant déstabiliser le système n'est pas telle que la condition de vol se situe à l'extérieur de l'enveloppe de vol.

### 8.1.2.3 Performances modales robustes

L'étude de la robustesse des performances modales a été mise en œuvre pour  $\alpha = 0.5$  et  $\xi = 0.3$ . À cette fin, l'enveloppe de vol a une nouvelle fois été subdivisée en 39 sous-domaines. Pour chacun d'entre eux, une  $\mu$ -analyse a été réalisée et les courbes correspondantes sont tracées à la Figure 8.8. La valeur maximale de  $\mu$  est strictement inférieure à 0.87 et est à nouveau limitante pour les vols à basses vitesses. Ce résultat garantit que même pour les configurations incertaines les plus défavorables, l'amortissement des pôles demeure supérieur à 0.3 et les constantes de temps inférieures à 2.0 s sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

Une seconde  $\mu$ -analyse a été mise en œuvre pour  $\alpha = 1$  et  $\xi = 0.4$ . L'analyse est positive pour la partie inférieure de l'enveloppe de vol décrite à la Figure 8.9(a). Les résultats associés à cette zone sont tracés à la Figure 8.9(b). Ce résultat garantit donc que sur la moitié inférieure

droite de l'enveloppe de vol, même pour les configurations incertaines les plus défavorables, l'amortissement des pôles demeure supérieur à 0.4 et les constantes de temps inférieures à 1.0 s. L'analyse des résultats a montré que l'amortissement de 0.4 est garanti sur l'ensemble de l'enveloppe de vol à l'exception des vols aux dessus de 9000 m et pour des vitesses supérieures à 0.8 M. Le facteur limitant dans les performances de la partie supérieure gauche de l'enveloppe de vol est donc la constante de temps des pôles dominants.

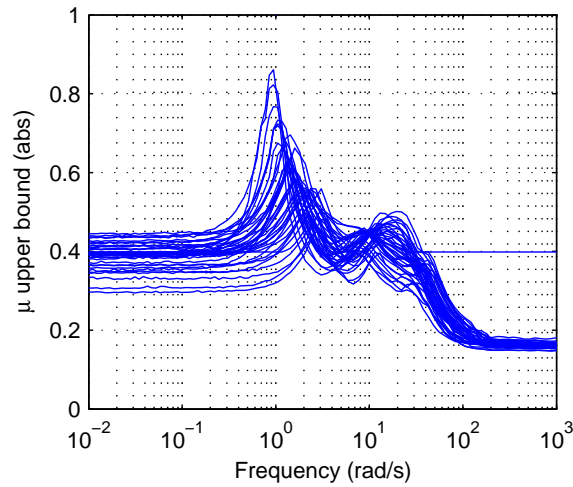


Figure 8.8  $\mu$ -analyse : résultat pour la stabilité robuste des performances modales pour  $\alpha = 0.5$  et  $\xi = 0.3$

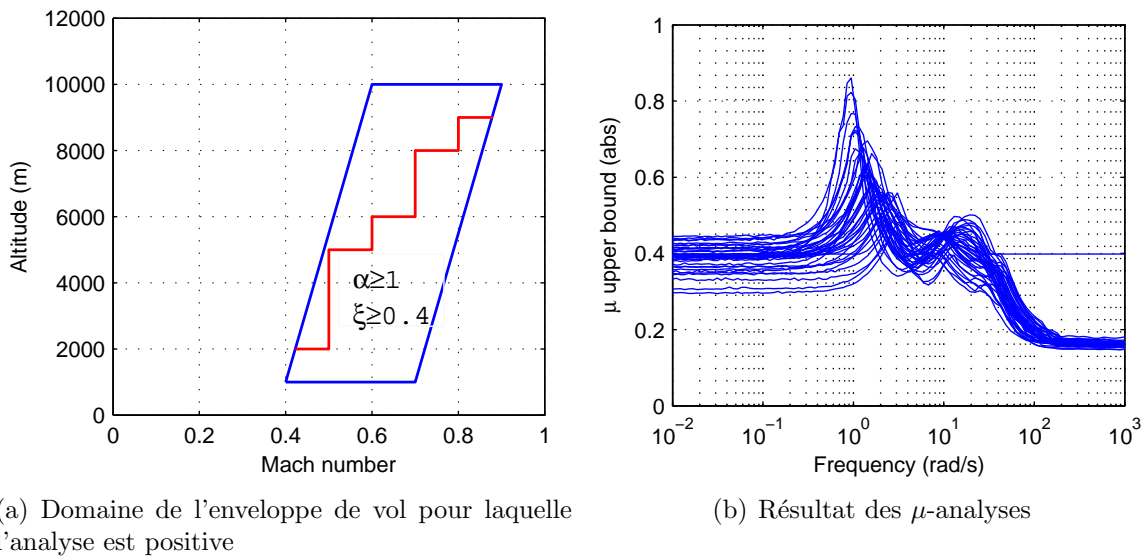


Figure 8.9  $\mu$ -analyse : résultat pour la stabilité robuste des performances modales pour  $\alpha = 1$  et  $\xi = 0.4$

#### 8.1.2.4 Poursuite robuste

On cherche à évaluer les performances en poursuite du système en boucle fermée, en dépit des incertitudes portant sur les paramètres de masse et les coefficients aérodynamiques. Le critère de la phase de synthèse (7.3) est ici repris en normalisant le filtre passe-bas  $W = W_1/15$ , de telle sorte que son gain pour les basses et moyennes fréquences soit proche de 1. On cherche alors à trouver la plus petite constante  $1/\rho$  telle que sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et pour toutes les incertitudes admissibles :

$$\|W(G_{\text{ref}} - T_n)\|_{\infty} \leq 1/\rho.$$

L'enveloppe de vol est une nouvelle fois décomposée en 39 sous-domaines sur chacun desquels une  $\mu$ -analyse a été réalisée pour  $1/\rho = 0.45$ . Les résultats obtenus sont donnés à la Figure 8.10. Ces derniers indiquent qu'en dépit des incertitudes portant sur les paramètres de masse et coefficients aérodynamiques, le contrôleur assure une performance en poursuite dont le gain est inférieur à 0.45.

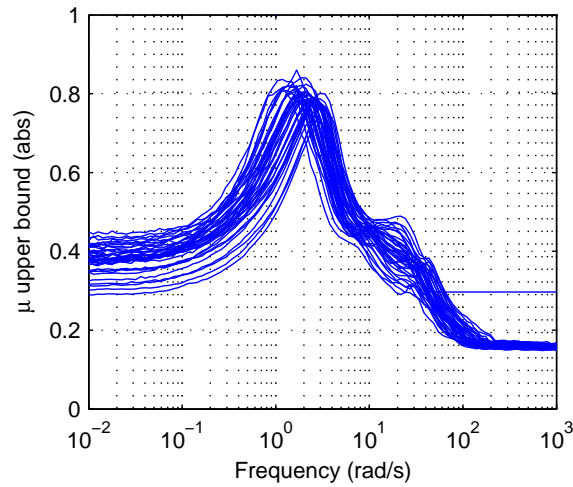


Figure 8.10  $\mu$ -analyse : résultat de la performance en poursuite pour  $1/\rho = 0.45$

## 8.2 Robustesse LPV

Bien que concluante, l'analyse LTI ne permet pas de garantir avec certitude la stabilité et les performances du système en boucle fermée dans le cadre d'une implémentation temps réelle de la loi de commande du facteur de charge. En effet, bien que lentement variant dans le temps, la condition de vol ne peut être rigoureusement considérée comme constante. D'une part, la vitesse de vol est sujette à de lentes variations dans le temps, notamment lors des



phases d'accélération de l'avion. D'autre part, l'altitude de vol est amenée à changer au cours des manœuvres. Une analyse portant sur la robustesse du système de commande quant aux variations de la condition de vol doit donc être menée. De plus, les paramètres de masse et de centrage sont également lentement variant dans le temps de par la consommation et les transferts de kérosène au cours du vol. Ils peuvent également varier brutalement lorsque l'on considère des opérations de type largage de matériel. L'impact de ces variations doit être étudiée de manière à prouver la stabilité et les performances de l'avion en boucle fermée pour des conditions réelles d'utilisation. Pour ces raisons, le système en boucle fermée est désormais vu comme un système LPV dont les différents paramètres évoluent dans le temps. En plus de la stabilité robuste du système LPV, on cherchera également à en étudier les performances robustes en poursuite. Pour cela, l'approche retenue est celle dite des IQC, puissant outil d'analyse robuste permettant de traiter les paramètres incertains et variant dans le temps, les non linéarités, les retards... Tout comme dans l'analyse LTI, les plages de variations des paramètres incertains sont listées dans le Tableau 8.1.

## 8.2.1 Revue théorique sur les IQC

On présente brièvement dans cette partie le formalisme des IQC et les problèmes d'analyse qu'ils permettent de résoudre. L'ensemble de cette section est largement inspirée de l'article de Megretski et Rantzer (1997) et du document de cours de Jönsson (2001).

### 8.2.1.1 Notations

On introduit classiquement  $\mathbf{RL}_\infty$  l'ensemble des fonctions scalaires, rationnelles et propres à coefficients réels. Son sous-ensemble constitué des fonctions ne présentant aucun pôle à partie réelle positive ou nulle est notée  $\mathbf{RH}_\infty$ . On note  $\mathbf{RL}_\infty^{n \times m}$  l'ensemble des matrices  $n \times m$  dont les coefficients sont des éléments de  $\mathbf{RL}_\infty$ . On définit de manière analogue  $\mathbf{RH}_\infty^{n \times m}$ .

On introduit également l'ensemble  $\mathbf{L}_2^l[0, +\infty[$  des fonctions  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^l$  de carré intégrable :

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

où  $|f|^2 = f^\top f$ . On note plus généralement  $\mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur tout intervalle  $I \subset [0, +\infty[$  de longueur fini. L'espace vectoriel  $\mathbf{L}_2^l[0, +\infty[$  est

un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle &: \mathbf{L}_2^l[0, +\infty[ \times \mathbf{L}_2^l[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\rightarrow \int_0^\infty f(t)^\top g(t) dt \end{aligned}$$

Par le théorème de Parseval, on obtient :

$$\forall f, g \in \mathbf{L}_2^l[0, +\infty[, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(j\omega)^* \hat{g}(j\omega) d\omega,$$

où l'on rappelle que  $\hat{f}$  est la transformée de Fourier de  $f$  qui est définie comme suit :

$$\hat{f}(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt.$$

Un opérateur se définit comme étant une fonction  $F : \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{L}_{2e}^m[0, +\infty[$  dont le gain est donné par :

$$\|F\| = \sup \{ \|F(f)\|_2 / \|f\|_2 : f \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[, f \neq 0 \}.$$

On définit l'opérateur dit de *projection sur le passé*  $P_T$ , qui laisse la fonction en argument inchangée sur l'intervalle  $[0, T]$  et donne la valeur 0 sur  $]T, +\infty[$ . Un opérateur  $F$  est alors dit *causal* si pour tout  $T > 0$ ,  $P_T F = P_T F P_T$ .

### 8.2.1.2 Définition d'une IQC

Une IQC prend la forme d'une inégalité permettant de représenter l'interaction qui existe entre deux signaux évoluant au sein d'un système dynamique. Plus précisément, deux signaux  $v \in \mathbf{L}_2^l[0, +\infty[$  et  $w \in \mathbf{L}_2^m[0, +\infty[$  satisfont l'IQC définie par le multiplicateur  $\Pi$  si :

$$\sigma_\Pi(v, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} \hat{v}(j\omega) \\ \hat{w}(j\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0, \quad (8.8)$$

où  $\Pi : j\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{(l+m) \times (l+m)}$  est une matrice hermitienne mesurable quelconque. Notons néanmoins que dans la majorité des cas pratiques, il est généralement suffisant d'avoir recours à des fonctions de transfert rationnelles qui sont bornées sur l'axe des imaginaires.

L'approche IQC constitue un puissant outil dans l'analyse des systèmes permettant de représenter l'interaction entre différents signaux. Par exemple, la saturation  $w = \text{sat}(v)$  est telle que les signaux  $v$  et  $w$  satisfont l'IQC (8.8) pour le multiplicateur  $\Pi = \text{diag}[1, -1]$ . De

manière générale, on dit qu'un opérateur  $\Delta : \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{L}_{2e}^m[0, +\infty[$  dont la norme est finie satisfait l'IQC définie par le multiplicateur  $\Pi$  si la relation (8.8) est vérifiée pour tout  $w = \Delta(v)$  où  $v \in \mathbf{L}_2^l[0, +\infty[$ . On note alors  $\Delta \in \text{IQC}(\Pi)$ . On trouve dans la littérature des multiplicateurs permettant de modéliser une multitude d'interactions entre des signaux (Megretski et Rantzer (1997)). Une liste non exhaustive en est donnée ci-dessous :

- multiplication par un scalaire réel, stationnaire et incertain ;
- opérateur linéaire stationnaire et incertain ;
- multiplication par un scalaire réel variant sans limite de vitesse dans le temps ;
- multiplication par un scalaire réel variant lentement dans le temps ;
- modélisation d'un retard ;
- multiplication par des oscillations harmoniques ;
- multiplication dans le domaine temporel par une matrice mesurable évoluant dans un polytope ;
- modélisation des non linéarités liées aux saturations et zones mortes ;
- modélisation de phénomènes non linéaires vérifiant certaines conditions d'enveloppe.

### 8.2.1.3 Stabilité et IQC

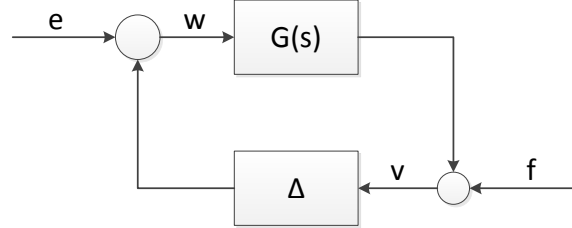


Figure 8.11 Interconnexion pour l'analyse de stabilité dans le cadre des IQC

L'analyse du système via le formalisme IQC nécessite sa reformulation sous la forme de l'interconnexion de la Figure 8.11 et dont les équations algébriques sont les suivantes :

$$\begin{cases} v = Gw + f \\ w = \Delta(v) + e \end{cases}, \quad (8.9)$$

où  $f \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[$  et  $e \in \mathbf{L}_{2e}^m[0, +\infty[$  sont des bruits dits d'interconnexion et où  $G$  et  $\Delta$  sont deux opérateurs causaux opérant respectivement sur  $\mathbf{L}_{2e}^m[0, +\infty[$  et  $\mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[$ .  $G$  est supposé être un opérateur linéaire stationnaire de fonction de transfert  $G(s) \in \mathbf{RH}_{\infty}^{l \times m}$ . On suppose également que l'opérateur  $\Delta$  est borné.

Par définition, l'interconnexion  $G\text{-}\Delta$  de la Figure 8.11 est *bien posée* si la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}_{2e}^{l+m}[0, +\infty[ & \rightarrow & \mathbf{L}_{2e}^{m+l}[0, +\infty[ \\ (v, w) & \rightarrow & (e, f) \end{array},$$

possède un inverse causal sur  $\mathbf{L}_{2e}^{l+m}[0, +\infty[$ . De plus, l'interconnexion est dite *stable* si cet inverse est borné, i.e. s'il existe une constante  $C > 0$  tel que pour toute solution de (8.9) vérifie :

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T (|v|^2 + |w|^2) dt \leq C \int_0^T (|f|^2 + |e|^2) dt. \quad (8.10)$$

Il est à noter que dans la majorité des applications pratiques, l'interconnexion  $G\text{-}\Delta$  est bien posée si et seulement si l'équation différentielle sous-jacente admet une solution unique et continue. De plus, il peut être montré que de par les hypothèses portant sur  $G$  et  $\Delta$ , l'interconnexion est stable si et seulement si  $(I - G\Delta)^{-1}$  est un opérateur causal borné sur  $\mathbf{L}_2^l[0, +\infty[$ . Le théorème de stabilité robuste est alors le suivant (Megretski et Rantzer (1997), page 821, Théorème 1) :

**Théorème 8.3 (Stabilité robuste)** *Soit  $G(s) \in \mathbf{RH}_\infty^{l \times m}$  et soit  $\Delta$  un opérateur causal borné. L'interconnexion  $G\text{-}\Delta$  est stable si les conditions suivantes sont réunies :*

1. *pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , l'interconnexion  $G - \tau\Delta$  est bien posée ;*
2. *pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , l'IQC définie par le multiplicateur  $\Pi$  est satisfaite par  $\tau\Delta$  :*

$$\forall \tau \in [0, 1], \quad \tau\Delta \in \text{IQC}(\Pi);$$

3. *il existe un  $\epsilon > 0$  tel que :*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\epsilon I. \quad (8.11)$$

Notons que dans la majorité des applications pratiques, le multiplicateur  $\Pi$  est choisi de telle sorte que :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^* & \Pi_{22} \end{bmatrix},$$

avec  $\Pi_{11} \geq 0$  et  $\Pi_{22} \leq 0$ <sup>1</sup>. Ainsi, la condition 2 du théorème de stabilité robuste est vérifiée dès lors que  $\Delta \in \text{IQC}(\Pi)$ .

---

1. Par définition, un opérateur  $\Psi : \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[$  est positif, noté  $\Psi \geq 0$ , si et seulement si  $\forall f \in \mathbf{L}_{2e}^l[0, +\infty[, \langle \Psi(f), f \rangle \geq 0$ . On dit que  $\Psi$  est négatif, noté  $\Psi \leq 0$ , si et seulement si  $-\Psi$  est positif.

Notons également que si un opérateur incertain  $\Delta$  satisfait plusieurs IQC définies par des multiplicateurs notés  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ , une condition suffisante assurant la stabilité du système est l'existence de  $n$  réels positifs  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \geq 0$  tels que (8.11) soit vérifié par  $\Pi = \gamma_1 \Pi_1 + \dots + \gamma_n \Pi_n$ . Cette approche permet de réduire le conservatisme du théorème de stabilité robuste (Varga *et al.* (2011)) en remplaçant la condition 3 de ce dernier par :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists \gamma_1, \dots, \gamma_n \geq 0 \quad / \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \sum_{i=1}^n \gamma_i \Pi_i(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} \leq -\varepsilon I. \quad (8.12)$$

#### 8.2.1.4 Performances et IQC

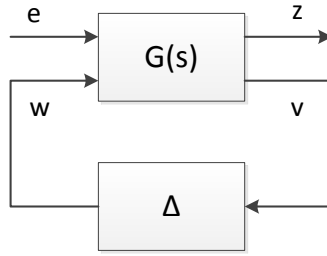


Figure 8.12 Interconnexion pour l'étude des performances via les IQC

Considérons à présent le système de la Figure 8.12 dont les équations sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} e \\ w \end{bmatrix} \\ w = \Delta(v) \end{cases} \quad (8.13)$$

Supposons que  $G \in \mathbf{RH}_{\infty}^{m+q \times m+q}$  et que  $\Delta$  est un opérateur causal et borné. Supposons de plus que le signal d'entrée  $e$  est astreint à appartenir à un sous-ensemble  $\mathcal{E} \subset \mathbf{L}_2^q[0, \infty[$  (par exemple un ensemble de fonctions vérifiant un certain gabarit fréquentiel). On cherche alors à vérifier que le système en boucle fermée satisfait certains critères de performance. L'une des performances les plus courantes concerne la mesure de la norme induite  $\mathbf{L}_2$  prise entre le signal d'entrée  $e$  et le signal de sortie  $z$ . Cette performance peut être évaluée à travers la considération de l'IQC suivante :

$$\sigma_P(z, e) = \int_0^{+\infty} (|z(t)|^2 - \gamma^2 |e(t)|^2) dt \leq 0. \quad (8.14)$$

Par définition, le système (8.13) rencontre la performance robuste définie par l'IQC  $\sigma_P$  pour

des signaux d'entrée  $e \in \mathcal{E}$  si :

1. l'interconnexion  $G-\Delta$  est stable ;
2.  $\sigma_P(z, e) \leq 0$  pour tout  $z = \mathcal{F}_l(G, \Delta)e$ ,  $e \in \mathcal{E}$ .

Afin d'énoncer le théorème de performance robuste permettant d'assurer la stabilité et les performances du système (Jönsson (2001), page 40, Proposition 6), on considère :

- un multiplicateur  $\Psi$  permettant de caractériser les signaux d'entrée via l'IQC :

$$\forall e \in \mathcal{E}, \quad \sigma_\Psi(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{e}(j\omega)^* \Psi(j\omega) \hat{e}(j\omega) d\omega \geq 0; \quad (8.15)$$

- un multiplicateur  $\Pi$  dont l'IQC est satisfaite par l'opérateur  $\Delta$  et tel que :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^* & \Pi_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

**Théorème 8.4 (Performance robuste)** *Supposons que  $\mathcal{E}$  vérifie l'IQC définie par le multiplicateur  $\Psi$  (8.15) et que l'opérateur  $\Delta$  vérifie l'IQC définie par le multiplicateur  $\Pi$ . Supposons de plus que  $\Pi$  est partitionné suivant la structure (8.16). Le système (8.13) est stable et rencontre la performance robuste de gain  $\mathbf{L}_2 \gamma$  si :*

1. pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , l'interconnexion  $G - \tau\Delta$  est bien posée ;
2. pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , l'IQC définie par le multiplicateur  $\Pi$  est satisfaite par  $\tau\Delta$  :

$$\forall \tau \in [0, 1], \quad \tau\Delta \in \text{IQC}(\Pi);$$

3. l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{11}(j\omega) & 0 & \Pi_{12}(j\omega) \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I + \Psi(j\omega) & 0 \\ 0 & \Pi_{12}^*(j\omega) & 0 & \Pi_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0. \quad (8.17)$$

### 8.2.1.5 Lien entre IQC et LMI

De manière à assurer la stabilité et la performance robuste du système en boucle fermée, il faut donc que l'inégalité matricielle (8.17) soit vérifiée pour tout  $\omega \in \mathbb{R}_+$ . Le problème ainsi formulé est de dimension infinie. Il est néanmoins possible de le ramener à un simple problème de résolution d'une LMI via le lemme Kalman-Yakubovich-Popov (KYP), que l'on rappelle ci-dessous (Rantzer (1996), page 7, Théorème 1).

**Lemme 8.5** (Lemme KYP) *Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $M = M^\top \in \mathbb{R}^{n+m \times n+m}$  telles que la condition  $\det(j\omega I - A) \neq 0$  soit vérifiée pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes.*

1.

$$\forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} < 0.$$

2. *Il existe une matrice  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que :*

$$\begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB \\ B^\top P & 0 \end{bmatrix} + M < 0.$$

Revenons à la troisième condition du théorème de stabilité robuste (8.17). Celle-ci prend la forme suivante :

$$\forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} < 0.$$

Le choix de réalisations appropriées de  $G$  et  $\Pi$  aboutit à l'égalité matricielle suivante :

$$\forall \omega \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega I - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme KYP, la condition 3 du théorème de stabilité robuste est donc équivalente à l'existence d'une matrice  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que :

$$\begin{bmatrix} A^\top P + PA & PB \\ B^\top P & 0 \end{bmatrix} + M < 0. \quad (8.18)$$

Ce résultat permet donc de ramener la résolution du problème de stabilité robuste d'un problème de dimension infini à la résolution d'une simple LMI.

## 8.2.2 «Toolbox» IQC $\beta$

Les analyses par IQC ont été mises en œuvre dans l'IQC $\beta$  *toolbox*<sup>2</sup> de MATLAB (Jönsson *et al.* (2004, 2013)).

### 8.2.2.1 Principe de fonctionnement

Cette *toolbox* permet, à des fins d'analyses, de tenir compte dans la modélisation du système de phénomènes tels que des paramètres variant dans le temps, des retards, des

---

2. Téléchargeable à l'adresse web : <http://www.math.kth.se/~uj/5B5744/5B5744.html>.

matrices évoluant dans un polytope... Pour cela, deux approches sont proposées. La première approche repose sur l'environnement Simulink via l'apport par la *toolbox* IQC $\beta$  de blocs spécifiques supplémentaires. La seconde approche permet de définir directement en ligne de commande les interactions entre les différents signaux via le recours à des fonctions incluses dans la *toolbox* IQC $\beta$ . Une fois le système modélisé, diverses fonctions sont disponibles afin d'en extraire certaines caractéristiques. Mentionnons par exemple l'existence de la fonction `iqc_gain_tbx` qui permet de calculer un majorant de la norme induite  $\mathbf{L}_2$  entre un signal d'entrée  $e$  et un signal de sortie  $z$  à travers la résolution d'une ou plusieurs LMI. Si le programme réussit avec succès à résoudre le problème, un majorant du gain  $\gamma$  est renvoyé en sortie, assurant par la même occasion que le système est stable. Dans le cas contraire, la fonction renvoie un ensemble vide, traduisant le fait que le programme n'a pas pu résoudre le problème. Deux cas de figure sont alors possibles : soit le système est instable, soit les IQC utilisées dans l'analyse ne permettent pas de conclure.

### 8.2.2.2 Exemple de mise en œuvre

Afin d'illustrer le principe de fonctionnement de la *toolbox* sur un exemple simple, revenons au problème du contrôle d'un moteur à courant continu de la Sous-Section 6.2.3. Supposons que le système est soumis à de fortes variations de température, dont le principal impact est de rendre la valeur de la résistance  $R_a$  lentement variable dans le temps. On cherche à vérifier que le système en boucle fermée demeure stable en dépit des variations de température et que les performances en poursuite sont toujours rencontrées.

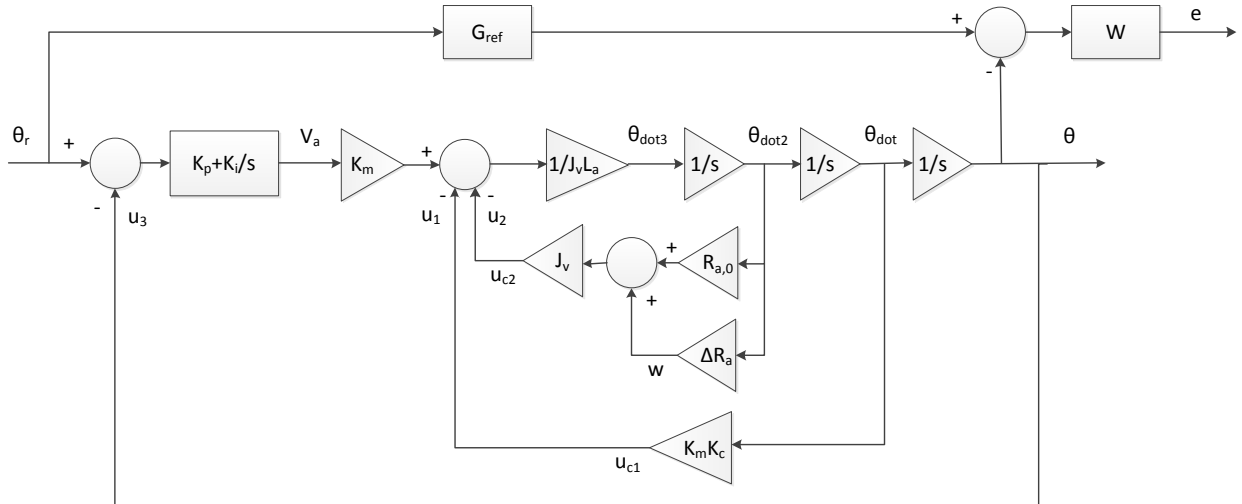


Figure 8.13 Décomposition du modèle du moteur en boucle fermée pour l'analyse IQC



On décompose la valeur de la résistance comme suit :  $R_a = R_{a,0} + \Delta R_a$ , où  $R_{a,0} = 1 \Omega$  est la valeur nominale et  $|\Delta R_a| \leq 0.25 \Omega$  représente l'incertitude autour de  $R_{a,0}$ , incertitude variable dans le temps. Cette décomposition est prise en compte au niveau du modèle à la Figure 8.13, diagramme utilisé par la suite comme référence pour définir les différents signaux et leurs interactions. La mise en œuvre de la *toolbox* IQC $\beta$  en ligne de commande est décrite ci-dessous.

1. Définition des constantes du problème.

```
Jv=0.1; Km=0.5; Kc=0.5; Ra=1; La=0.01;
```

2. Définition de la fonction de référence  $G_{\text{ref}}$  et du filtre de pondération  $W$ .

```
s=zpk('s');
```

```
Gref=4/(s^2+2*sqrt(2)*s+4);
```

```
W=10*10/(s+10);
```

3. Initialisation de l'environnement IQC.

```
abst_init_iqc
```

4. Définition des signaux élémentaires, i.e. des signaux du système ne pouvant pas se déduire des autres signaux via des relations algébriques. Typiquement, ces signaux constituent les entrées du système.

```
theta_r=signal;
```

5. Définition des signaux pseudo-élémentaires. Ces signaux ne sont pas des signaux élémentaires mais sont introduits de manière à faciliter la description des interactions entre les différents signaux. Typiquement, ces signaux correspondent aux boucles de rétroaction.

```
u_1=signal;
```

```
u_2=signal;
```

```
u_3=signal;
```

6. Ouverture de la boucle au niveau des paramètres sur lesquels porte l'analyse IQC et introduction des signaux de sortie de ces blocs.

```
w=signal;
```

7. Définition des signaux se déduisant algébriquement des autres.

```
Va=(Kp+Ki/s)*(theta_r-u_3);
```

```
theta_dot_3=1/(Jv*La)*(Km*Va-u_1-u_2);
```

```
theta_dot_2=1/s*theta_dot_3;
```

```
theta_dot=1/s*theta_dot_2;
```

```
theta=1/s*theta_dot;
```

- ```
e=W*(Gref*theta_r-theta);
uc_1=Km*Kc*theta_dot;
uc_2=Jv*(w+Ra0*theta_dot_2);
```
8. Identification des signaux de rebouclage. On déclare que des signaux sont égaux avec le symbole ==.
- ```
u_1==uc_1;
u_2==uc_2;
u_3==theta;
```
9. Définition de l'IQC portant sur la paramètre  $\Delta R_a$ .
- Vitesses de variation illimitées.
- ```
Delta_Ra_max=0.25;
w==iqc_tvscalar(theta_dot_2,Delta_Ra_max);
```
- Vitesses de variation limitées. Dans cet exemple  $\left| \dot{R}_a \right| \leq 0.1 \Omega/s$ .
- ```
Delta_Ra_max=0.25;
Speed_Ra=0.1;
a=[1 3 5]; %Paramètre venant ajuster le multiplicateur II utilisé dans l'analyse.
w==iqc_slowtv(theta_dot_2,Speed_Ra,a,Delta_Ra);
```
10. La description du système étant maintenant complète, on cherche à obtenir le gain entre l'entrée  $\theta_r$  et la sortie  $e$ .
- ```
gain=iqc_gain_tbx(theta_r,e)
```

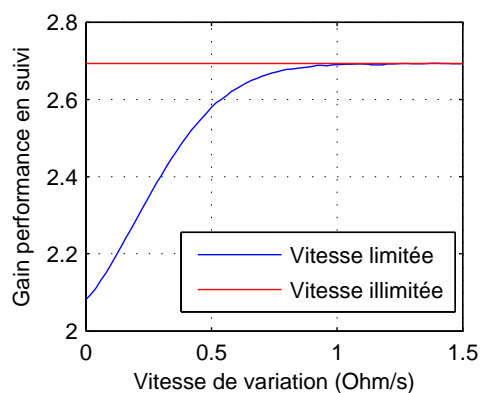


Figure 8.14 Moteur DC : gain de la performance en poursuite pour une résistance variant dans le temps

Les résultats ainsi obtenus sont illustrés à travers la Figure 8.14. Notons premièrement que pour une résistance dont la valeur est incertaine mais stationnaire, le gain de la performance en poursuite est légèrement inférieur à 2.1, résultat à comparer au 0.71 obtenu lors de la

synthèse sur le système nominal. Notons ici que ces résultats sont obtenus avec un filtre de pondération  $W$  dont le gain aux basses fréquences est de 10. Lorsque l'on considère des vitesses de variation illimitées de la valeur de la résistance  $R_a$ , on obtient que le système demeure stable avec un gain proche de 2.7. Ce gain est atteint dès lors que l'on considère des vitesses de variation de l'ordre de  $0.9\Omega/s$ .

### 8.2.3 Application et résultats

On cherche à évaluer l'impact des variations temporelles de la condition de vol et des paramètres de masse et de centrage sur la stabilité et la performance en poursuite du système en boucle fermée. La performance en poursuite est évaluée en comparant la réponse du système en boucle fermée à celle du modèle de référence  $G_{\text{ref}}$  (7.1) dont la pulsation naturelle  $\omega_{n,\text{ref}}$  est donnée par (7.10). Tout comme lors de la phase de synthèse, la performance en poursuite est évaluée pour les basses et moyennes fréquences via la pondération :

$$W = \left( \frac{5}{s+5} \right)^2.$$

#### 8.2.3.1 Paramètres de masse et de centrage variant dans le temps

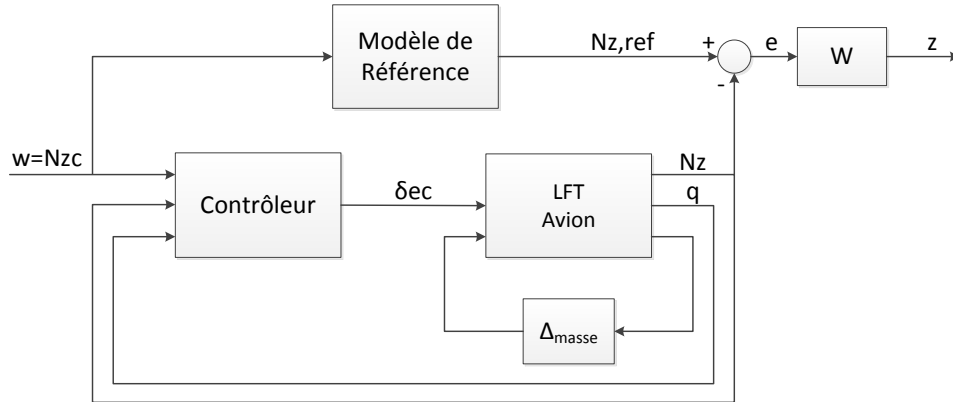


Figure 8.15 Structure de l'interconnexion du système en boucle fermée pour des variations de masse et de centrage

On cherche premièrement, pour une condition de vol donnée, à évaluer l'impact de la variation des paramètres de masse et de centrage sur la stabilité et la performance en poursuite. Le système ainsi étudié prend alors la forme de la Figure 8.15. Le premier cas de figure concerne des variations lentes des paramètres de masse et de centrage au cours du temps, correspondant à la consommation de kérosène au cours du vol et à son transfert entre

les différentes cuves de l'avion. Le deuxième cas de figure concerne des variations rapides des paramètres de masse et de centrage, correspondant à une opération de type largage de matériel.

La procédure utilisée pour mettre en place l'analyse est décrite ci-dessous.

1. Discrétisation du domaine incertain constitué des paramètres de masse et de centrage.
2. Pour une condition de vol donnée, calcul des points d'équilibre associés à chacun des points du domaine incertain discrétisé.
3. Injection des points d'équilibre dans le calcul des coefficients aérodynamiques. Ces derniers sont alors modélisés sous la forme de fonctions polynomiales des paramètres incertains via une minimisation des moindres carrés à travers la fonction `lsqnonlin` de MATLAB.
4. Définition des paramètres incertains via l'environnement `ureal` de MATLAB.
5. Élaboration de la représentation d'état incertaine de la dynamique de l'avion. Les fonctions trigonométriques et exponentielles dont l'argument est fonction des paramètres de masse et de centrage sont remplacées par leur développement limité. On obtient ainsi une représentation incertaine dont la dépendance est polynomiale vis-à-vis des paramètres de masse et de centrage. Ce modèle incertain est passé en argument de la fonction `lftdata` afin d'obtenir le système LPV sous forme d'une LFT supérieure de manière à sortir le bloc d'incertitudes.
6. Décomposition des matrices de la représentation LFT afin de pouvoir définir les relations algébriques entre les différents signaux.
7. Chargement de l'environnement IQC de la *toolbox* IQC $\beta$ .
8. Définition des signaux élémentaires et leurs relations algébriques.
9. Définition des paramètres de masse variant dans le temps via les fonctions `iqc_tvscalar` et/ou `iqc_slowtv`.
10. Utilisation de la commande `iqc_gain_tbx` pour obtenir le gain de la performance en poursuite.

Il est à noter que contrairement à l'approche utilisée pour la  $\mu$ -analyse, on modélise ici directement les coefficients aérodynamiques par des fonctions polynomiales (au lieu de modéliser les points d'équilibre pour ensuite les injecter dans les coefficients aérodynamiques). On réduit de cette manière la complexité du problème en réduisant le degré des polynômes utilisés

dans la modélisation. Cela permet d'aboutir à la résolution de LMI dont le nombre de variables de décision est compris entre 4000 et 6000, contre plus de 20000 pour une approche telle qu'utilisée pour la  $\mu$ -analyse.

Notons également que plusieurs approches sont possibles pour définir le système. Il est par exemple possible de mettre l'ensemble du système LPV sous forme LFT (modèle de l'avion + modèle de l'actionneur + contrôleur + modèle de référence + pondération). L'approche ici privilégiée, étant donné que seul le modèle de l'avion dépend des paramètres de masse et de centrage, est de mettre sous forme LFT uniquement le modèle de la dynamique de l'avion. Les autres composantes du système en boucle fermée sont alors définies via des fonctions de transfert. Finalement, l'interconnexion entre les différents éléments est effectuée via des équations algébriques dans l'environnement IQC de la *toolbox* IQC $\beta$ . Des tests ont montré que la seconde approche permet d'obtenir des LMI dont le nombre de variables de décision est moindre comparativement à la première approche.

L'impact de rapides variations de la masse  $m$ , de la position longitudinale du centre de gravité  $\Delta x$  et du moment d'inertie  $I_y$ , a été testé pour 40 conditions de vol réparties de manière uniforme sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Pour chacune des 10 altitudes allant de 1000 m à 10000 m, 4 vitesses uniformément réparties  $M_1 < M_2 < M_3 < M_4$  sont considérées. Les résultats obtenus sont donnés dans le Tableau 8.3 et sont à comparer au 0.1053 obtenu lors de la phase de synthèse<sup>3</sup>.

Tableau 8.3 Gains de la performance en poursuite lorsque les paramètres de masse et de centrage varient rapidement dans le temps

| $h$ (km) \ $V_T$ | $M_1$  | $M_2$  | $M_3$  | $M_4$  |
|------------------|--------|--------|--------|--------|
| 1                | 0.1674 | 0.1594 | 0.1755 | 0.2001 |
| 2                | 0.1643 | 0.1609 | 0.1788 | 0.1913 |
| 3                | 0.1655 | 0.1590 | 0.1783 | 0.1827 |
| 4                | 0.1669 | 0.1582 | 0.1726 | 0.1738 |
| 5                | 0.1674 | 0.1597 | 0.1697 | 0.1697 |
| 6                | 0.1706 | 0.1628 | 0.1665 | 0.1659 |
| 7                | 0.1754 | 0.1668 | 0.1671 | 0.1651 |
| 8                | 0.1792 | 0.1711 | 0.1693 | 0.1655 |
| 9                | 0.1813 | 0.1752 | 0.1721 | 0.1670 |
| 10               | 0.1871 | 0.1793 | 0.1757 | 0.1702 |

3. Gain final de 1.58 lors de la synthèse avec une pondération  $W_1$  de gain 15. On obtient donc pour la performance en poursuite de gain  $1.58/15 = 0.1053$ .

Le système est stable pour l'ensemble des conditions de vol testées avec une performance en poursuite allant de 0.1582 à 0.2001. Bien que les variations rapides des paramètres de masse et de centrage dégradent significativement la performance du système en boucle fermée, cette dernière demeure satisfaisante. Notons de plus qu'une variation rapide des paramètres de masse et de centrage ne peut se traduire physiquement que par un largage de matériel. Ce phénomène ne se produisant que sur un laps de temps très court, l'avion ne peut être sujet à de rapides variations de masse et de centrage que sur de courtes périodes de temps. Cet aspect n'est pas pris en compte dans l'analyse précédente.

L'impact de la vitesse de variation des différents paramètres de masse sur la performance en poursuite a été étudiée sur quelques exemples. La Figure 8.16 montre l'impact de la vitesse de variation de la masse de l'avion sur le gain de la performance en poursuite pour l'exemple de deux conditions de vol particulières. L'impact de la vitesse de variation de la position longitudinale du centre de gravité est quant à lui illustré sur la Figure 8.17. Pour un fonctionnement normal de l'avion, les vitesses de variation de la masse et du centrage sont si faibles que le gain de la performance en poursuite est sensiblement le même que celui du système LTI. Les performances pour des vitesses de variation illimitées sont quant à elles généralement atteintes pour des vitesses de variation très importantes des paramètres de masse et de centrage, même si ces valeurs peuvent dépendre significativement du point de vol. La Figure 8.17 illustre bien ce phénomène. Alors que pour la condition de vol ( $V_T = 0.7 \text{ M}$ ,  $h = 5000 \text{ m}$ ) les performances en vitesses de variation illimitées sont atteintes pour une vitesse de variation de la position longitudinale du centre de gravité de l'ordre de  $0.7 \text{ m/s}$ , la condition de vol ( $V_T = 0.6 \text{ M}$ ,  $h = 10000 \text{ m}$ ) rencontre ces performances pour une vitesse de variation de l'ordre de  $0.2 \text{ m/s}$ .

Pour finir, on étudie pour la condition de vol particulière ( $V_T = 0.7 \text{ M}$ ,  $h = 5000 \text{ m}$ ) l'impact de lentes variations des 3 paramètres de masse que sont la masse de l'avion, le centrage et le moment d'inertie  $I_y$ . Pour cela on définit une vitesse dite normalisée. Une vitesse normalisée de 1 correspond à une variation de la masse de l'avion de  $1000 \text{ kg/s}$ , de sa position longitudinale du centre de gravité de  $4.35 \% \text{ mac/s}$  et de la valeur de son moment d'inertie  $I_y$  à hauteur de  $10\%$  de sa valeur nominale par seconde. Le résultat de l'analyse est donné à la Figure 8.18. Une nouvelle fois, pour des vitesses de variation résultantes du fonctionnement normal de l'avion, le gain de la performance en poursuite est sensiblement égal à celui du système LTI. Les performances en vitesses de variation illimitées sont rencontrées pour des vitesses de variation très importantes des paramètres de masse, de l'ordre de  $3000 \text{ kg/s}$  pour la masse de

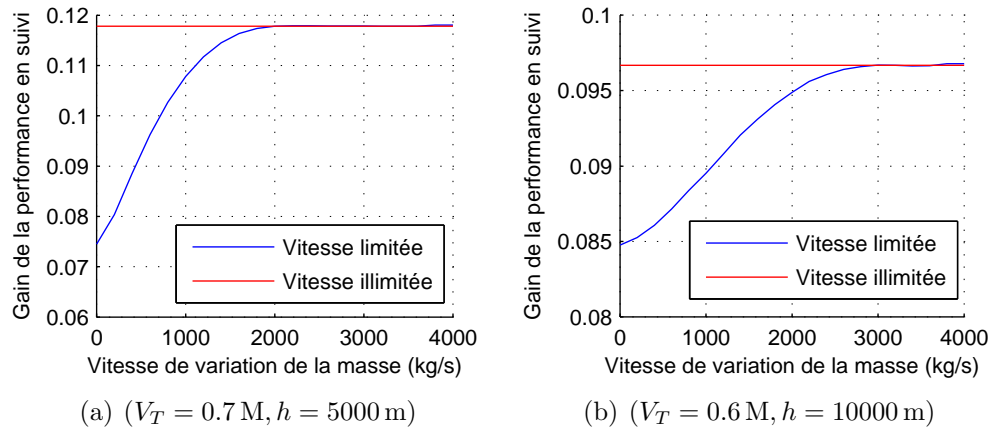


Figure 8.16 Impact de la vitesse de variation de la masse de l'avion sur les performances en poursuite

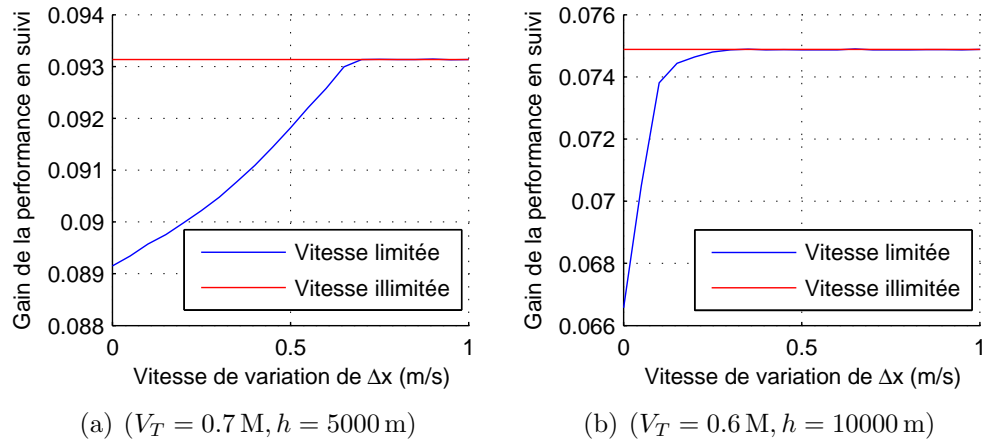


Figure 8.17 Impact de la vitesse de variation de la position longitudinale du centre de gravité sur les performances en poursuite

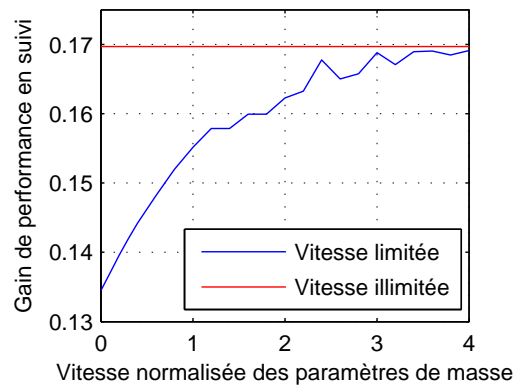


Figure 8.18 Impact de la vitesse de variation des trois paramètres de masse sur la performance en poursuite

l'avion, une vitesse de déplacement du centre de gravité de 45 cm/s et un coefficient d'inertie variant à hauteur de 30% de sa valeur nominale par seconde. De telles vitesses ne peuvent être rencontrées que dans le cas d'un largage de matériel sur un laps de temps très court.

### 8.2.3.2 Condition de vol variant dans le temps

On cherche désormais à évaluer l'impact de la variation des conditions de vol sur la stabilité et la performance en poursuite. Pour cela, de lentes variations de la vitesse de vol et de l'altitude sont considérées. Le système ici étudié prend alors la forme de la Figure 8.19.

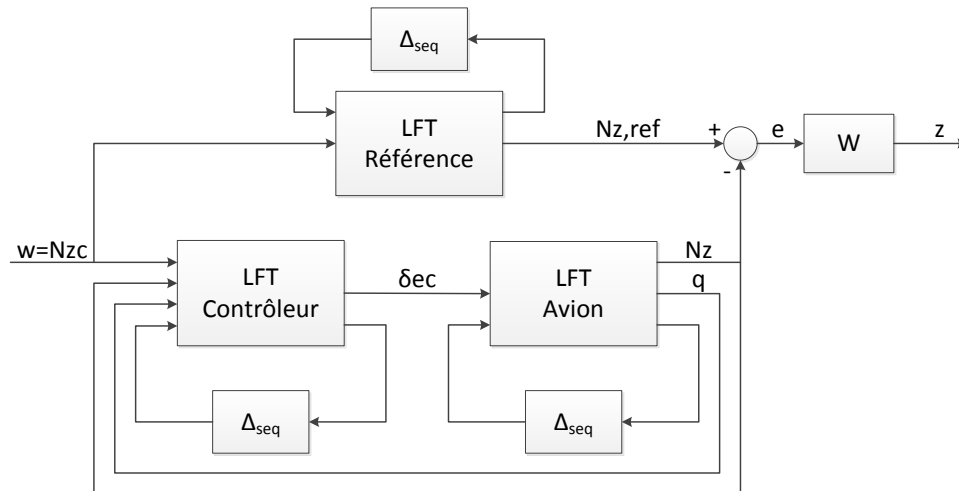


Figure 8.19 Structure de l'interconnexion du système en boucle fermée pour des variations de condition de vol

La procédure utilisée pour mettre en place l'analyse est décrite ci-dessous.

1. Subdivision de l'enveloppe de vol en sous-domaines de taille réduite.
2. Discrétisation du sous-domaine de vol considéré.
3. Pour une configuration donnée des paramètres de masse et de centrage, calcul des points d'équilibre à travers le sous-domaine de vol discrétisé.
4. Injection des points d'équilibre dans le calcul des coefficients aérodynamiques. Ces derniers sont alors modélisés sous la forme de fonctions polynomiales des variables de séquençage via une minimisation des moindres carrés à travers la fonction `lsqnonlin` de MATLAB.
5. Définition des paramètres de séquençage via l'environnement `ureal` de MATLAB.
6. Élaboration d'une représentation d'état du système (dynamique de l'avion en boucle fermée + modèle de référence) séquençée relativement à l'altitude et au nombre de



Mach. Les fonctions trigonométriques et exponentielles dont l'argument est fonction de la condition de vol sont remplacées par leur développement limité. On obtient ainsi une représentation LPV dont la dépendance est polynomiale vis-à-vis de la condition de vol. Ce modèle est passé en argument de la fonction `lftdata` afin d'obtenir le système sous forme LFT de manière à sortir le bloc des variables de séquençement.

7. Décomposition des matrices de la représentation LFT afin de pouvoir définir les relations algébriques entre les différents signaux.
8. Chargement de l'environnement IQC de la *toolbox* IQC $\beta$ .
9. Définition des signaux élémentaires et leurs relations algébriques.
10. Définition des conditions de vol variant lentement via la fonction `iqc_slowtv`.
11. Utilisation de la commande `iqc_gain_tbx` pour obtenir le gain de la performance en poursuite sur le sous-domaine de vol considéré.

De manière à réduire la complexité de l'analyse, le modèle de référence dont la pulsation naturelle dépend des variables de séquençement via (7.10) est approximé par un modèle constant sur le sous-domaine analysé. Plus précisément, pour un sous domaine dont les variables de séquençement évoluent dans le rectangle  $[M_{\min}, M_{\max}] \times [h_{\min}, h_{\max}]$ , le modèle de référence est fixé pour la pulsation naturelle :

$$\omega_{n,\text{ref}}((M_{\min} + M_{\max})/2, (h_{\min} + h_{\max})/2).$$

On évalue premièrement l'impact de variations limitées du nombre de Mach sur la performance en poursuite. Pour cela, on se concentre sur le sous-domaine de l'enveloppe de vol correspondant à  $0.6 \leq M \leq 0.7$  et  $5000 \leq h \leq 6000$  m. La performance en poursuite est évaluée pour une variation d'altitude maximale fixée à 100 m/s. Le résultat de l'analyse est illustré à la Figure 8.20. On obtient ainsi que pour des vitesses stationnaires, le gain de la performance en poursuite est de 0.179 contre 0.266 pour des vitesses illimitées. Cette performance est atteinte dès lors que l'on considère des vitesses de variation du nombre de Mach de l'ordre de 0.2 M/s.

L'impact des variations de la condition de vol est évalué en subdivisant l'enveloppe de vol en 39 sous-domaines. En se basant sur les caractéristiques techniques du F-16, une vitesse maximale de variation du nombre de Mach de 0.01 M/s et un changement d'altitude de vitesse maximale 100 m/s ont été considérés dans l'analyse. L'analyse par IQC permet alors de garantir la stabilité du système sur l'ensemble de l'enveloppe de vol avec un gain de performance en poursuite de 0.262. Le détail des résultats obtenus est présenté en Annexe E.

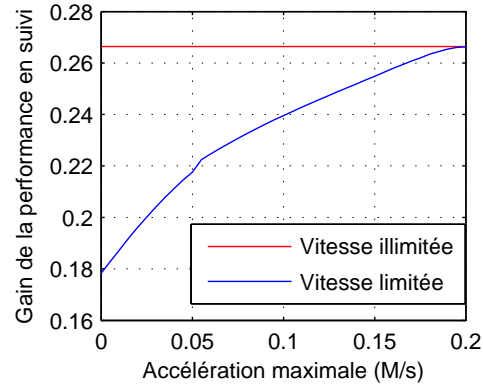


Figure 8.20 Impact de variations limitées du nombre de Mach sur la performance en poursuite

### 8.2.3.3 Retards dans les mesures

On évalue l'impact des retards sur la stabilité et les performances du système en boucle fermée pour le modèle nominal de l'avion. On s'intéresse dans un premier temps à l'impact des retards dans les mesures du facteur de charge  $N_z$  et de la vitesse en tangage  $q$  pour la condition de vol ( $V_T = 0.7 M, h = 5000 m$ ). Le résultat est donné à la Figure 8.21 et montre que la stabilité et les performances du système en boucle fermée sont assurées pour des retards allant jusqu'à approximativement 40 ms au niveau des deux mesures. On observe pour des retards supérieurs une dégradation des performances jusqu'à ce que les LMI deviennent insolubles. Cela indique que le système est au mieux stable avec des performances en poursuite très dégradées, probablement instable.

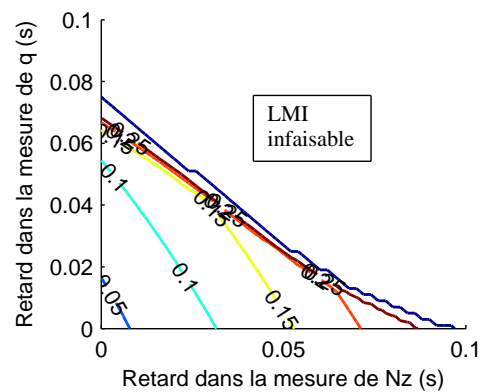


Figure 8.21 Impact des retards dans les mesures sur la performance en poursuite du système en boucle fermée

En se fixant un retard de 15 ms pour la mesure du facteur de charge  $N_z$  et de la vitesse en

tangage  $q$ , on évalue l'impact du retard introduit par le contrôleur sur les performances du système en boucle fermée (Fig. 8.22). On observe que pour des retards inférieurs à 15 ms, la performance en poursuite n'est quasiment pas impactée. Celle-ci se dégrade très rapidement pour des retards dépassant les 17 ms et le système devient instable pour des retards de l'ordre de 25 ms.

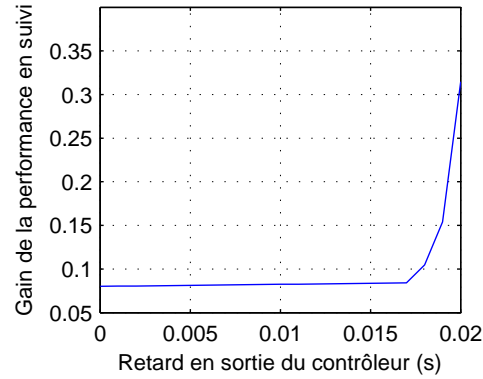


Figure 8.22 Impact des retards au niveau du contrôleur sur la performance en poursuite du système en boucle fermée

On évalue finalement les performances du système en boucle fermée pour 40 points de l'enveloppe de vol en considérant des retards de 15 ms au niveau des mesures et un retard de 10 ms à la sortie du contrôleur. Les résultats sont synthétisés dans le Tableau 8.4. Le maximum ainsi obtenu est de 0.1134, indiquant qu'en dépit des retards, le contrôleur stabilise le système en boucle fermée et permet de rencontrer les performances en poursuite.

Tableau 8.4 Gains de la performance en poursuite en présence d'un retard de 15 ms aux niveaux des mesures et d'un retard de 10 ms à la sortie du contrôleur

| $h$ (km) \ $V_T$ | $M_1$  | $M_2$  | $M_3$  | $M_4$  |
|------------------|--------|--------|--------|--------|
| 1                | 0.0897 | 0.1057 | 0.1076 | 0.1134 |
| 2                | 0.0841 | 0.1002 | 0.1061 | 0.1006 |
| 3                | 0.0787 | 0.0934 | 0.1007 | 0.0900 |
| 4                | 0.0731 | 0.0855 | 0.0925 | 0.0815 |
| 5                | 0.0690 | 0.0776 | 0.0824 | 0.0845 |
| 6                | 0.0602 | 0.0691 | 0.0724 | 0.0713 |
| 7                | 0.0544 | 0.0624 | 0.0642 | 0.0698 |
| 8                | 0.0505 | 0.0577 | 0.0596 | 0.0723 |
| 9                | 0.0494 | 0.0543 | 0.0586 | 0.0761 |
| 10               | 0.0418 | 0.0508 | 0.0604 | 0.0819 |

### 8.3 Réponses temporelles sur le modèle non linéaire

Les simulations temporelles ont été effectuées jusqu'à présent en se basant sur une famille de modèles LTI représentative de la dynamique de l'avion à travers l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain. Il s'agit à présent de valider le bon comportement du système en boucle fermée sur le modèle non linéaire complet de l'avion. Pour cela, le modèle dynamique non linéaire de la dynamique longitudinale de l'avion avec offset sur la position longitudinale du centre de gravité est considéré (3.23). Ne s'étant attardé que sur le contrôle du mode *Short Period*, nous ne disposons pas d'une boucle de guidage (Fig. 5.1) afin d'asservir la vitesse  $V_T$  de l'avion par l'intermédiaire de la manette des gaz  $\delta_t$ . Pour cette raison, on se concentre uniquement sur la dynamique d'évolution des grandeurs liées au mode *Short Period*, à savoir l'angle d'attaque  $\alpha$  et la vitesse en tangage  $q$ , en supposant que l'on est libre d'imposer le profil en vitesse de l'avion :

$$\left\{ \begin{array}{l} mV_T\dot{\alpha} = -L - \sin(\alpha + \alpha_T)F_T + \frac{m\Delta x \cos(\alpha)}{I_y - m\Delta x^2} (m_a + m_T) + m \cos(\Theta - \alpha)g \\ \quad + mV_T Q - m \sin(\alpha) \Delta x Q^2 \\ \dot{Q} = \frac{1}{I_y - m\Delta x^2} (m_a + m_T) \\ \dot{\Theta} = Q \end{array} \right. \quad (8.19)$$

Les sorties du système sont alors la vitesse en tangage  $q$  et le facteur de charge  $N_z$ . Rappelons que ce dernier, afin d'être injecté dans le contrôleur, doit se voir retrancher sa valeur d'équilibre, à savoir  $\cos(\Theta)$  (5.1). On suppose donc que l'angle d'assiette  $\Theta$  est également mesuré et utilisable par le contrôleur. Il faut de plus tenir compte de la dynamique d'évolution de l'altitude  $h$  de l'avion. En effet, ce paramètre intervient à différents niveaux dans la modélisation :

- calcul des forces aérodynamiques à travers la densité de l'air  $\rho$  (3.1) ;
- calcul des gains du contrôleur, ces derniers étant séquencés par rapport au nombre de Mach et à l'altitude.

En revenant à la définition de la pente  $\gamma$  de l'avion (3.9), on obtient que la dynamique d'évolution de l'altitude est régie par :

$$\dot{h} = V_T \sin(\gamma), \quad (8.20)$$

où  $\gamma = \Theta - \alpha$  dans le cadre du vol en croisière. Finalement, les limitations physiques de l'actionneur (saturations en débattement et en vitesse) sont considérées. La prise en compte de l'ensemble de ces éléments mène à la mise en place d'une simulation (Fig. 8.23) permettant

de rendre compte le plus fidèlement possible du comportement réel de l'avion, lorsque celui-ci est placé en boucle fermée avec le contrôleur autoséquenté.

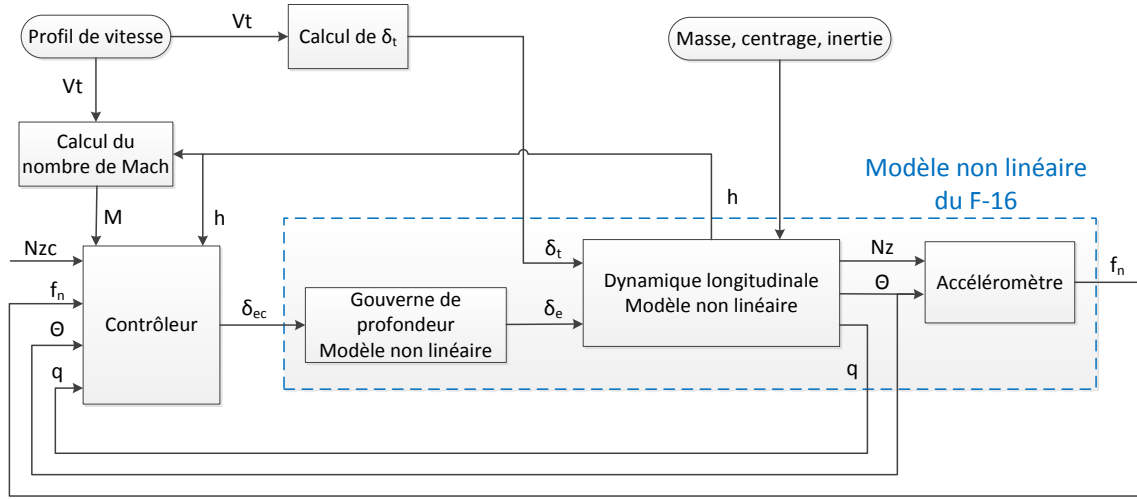


Figure 8.23 Modèle utilisé pour les simulations sur le modèle non linéaire

Cette simulation rend ainsi possible l'évaluation de la réponse temporelle du système en boucle fermée à des entrées de commande du facteur de charge. Elle permet en outre d'imposer à l'avion des profils de vitesse et de venir jouer sur la valeur des paramètres de masse, de centrage et d'inertie au cours de la simulation.

### 8.3.1 Condition de vol fixe

Considérons dans un premier temps la configuration irréaliste dans laquelle à la fois la vitesse et l'altitude de l'avion sont constantes au cours d'une manœuvre. Cela revient à négliger dans un premier temps l'impact des variations d'altitude (8.20) sur la dynamique de l'avion. Bien que non réaliste, cette configuration est l'analogue de celle mise en place lors des simulations sur les modèles linéarisés. Cette approche permet de comparer la réponse du système non linéaire en boucle fermée avec le modèle de référence. Le résultat est présenté à la Figure 8.24 pour la condition de vol ( $V_T = 0.65 M$ ,  $h = 5000 m$ ) et pour 35 configurations de masse et de centrage couvrant le domaine incertain (5.10). La réponse du facteur de charge à un échelon de commande unitaire est illustrée à la Figure 8.24(a), où la réponse du modèle de référence est tracée en ligne étoilée rouge. Tout comme lors des simulations sur le modèle linéarisé, le système en boucle fermée suit correctement la réponse du modèle de référence en dépit des incertitudes portant sur les paramètres de masse et de centrage avec un temps de réponse de 2.0 s et un dépassement inférieur à 10%. La réponse en  $q$  est également validée avec un dépassement inférieur à 100% (Fig. 8.24(b)). Le bon comportement de l'actionneur est

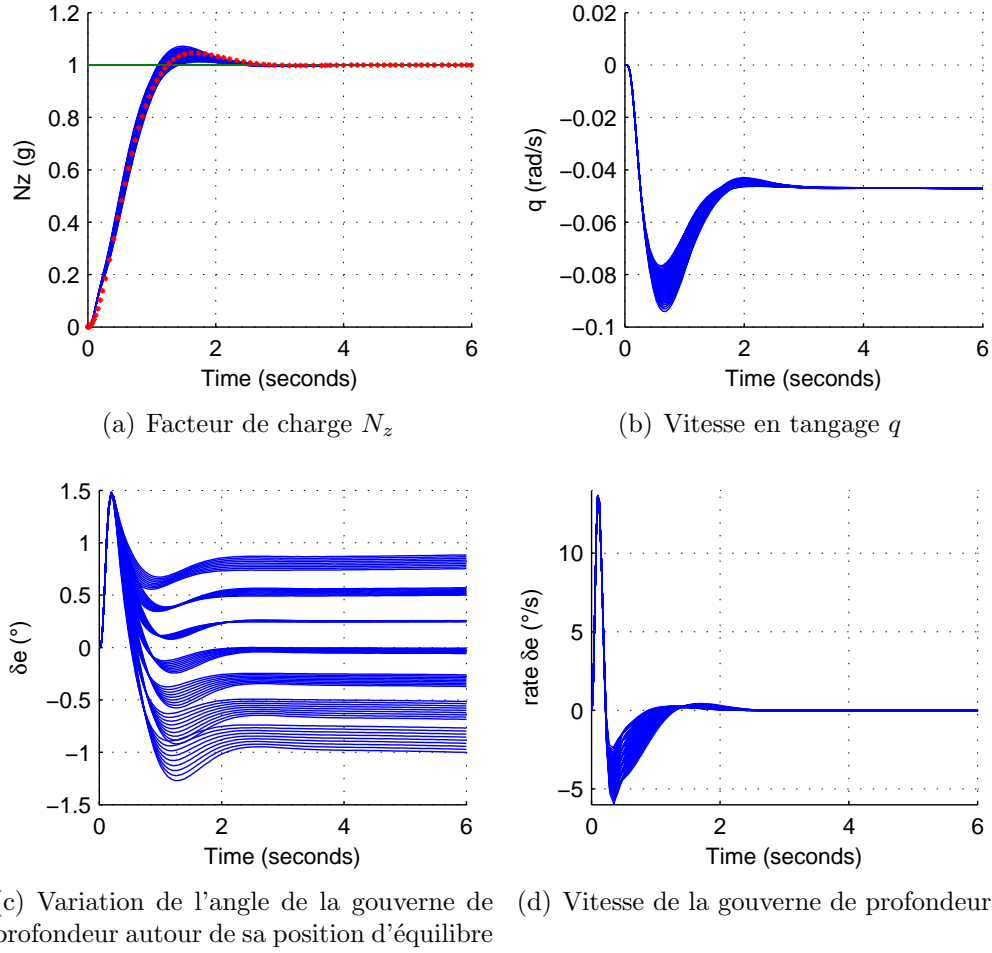


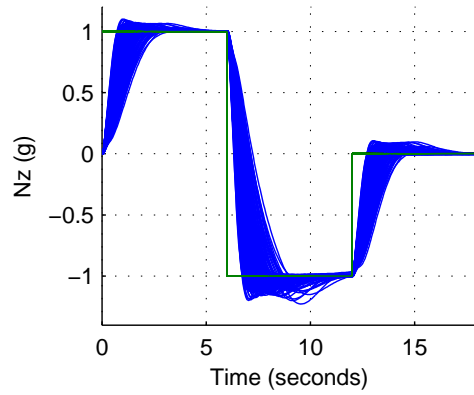
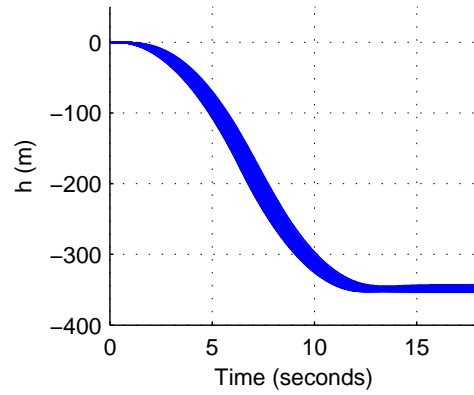
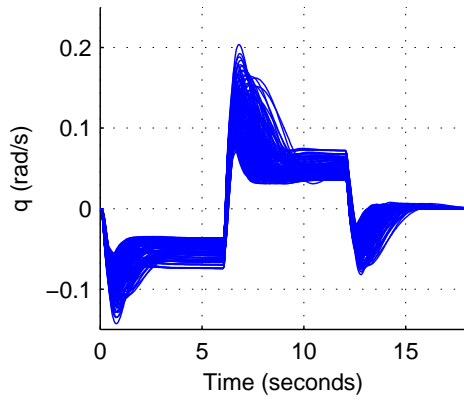
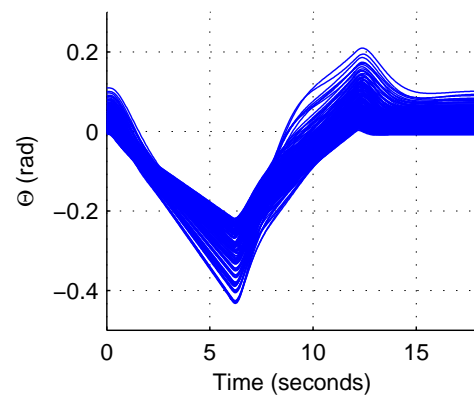
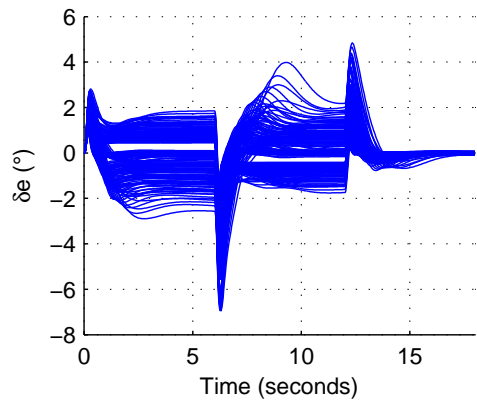
Figure 8.24 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour la condition de vol ( $V_T = 0.65 M$ ,  $h = 5000$  m) et pour 35 configurations de masse et centrage

également vérifié, ce dernier ne présentant pas de saturation ni en débattement (Fig. 8.24(c)) ni en vitesse (Fig. 8.24(d)).

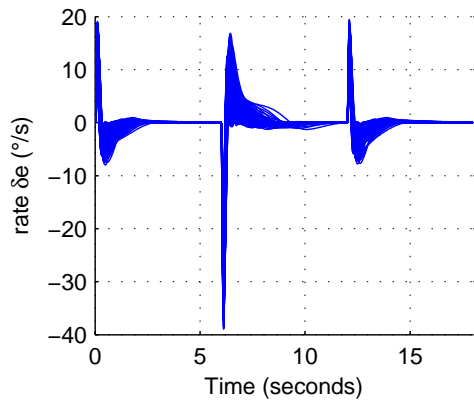
### 8.3.2 Vitesse fixe

On suppose à présent que la vitesse  $V_T$  est fixe mais que l'altitude varie selon l'équation (8.20). On évalue alors la réponse temporelle du système non linéaire en boucle fermée à un test de type doublet. On considère pour cela les 35 points de vol décrits à la Figure 7.9. Pour chacun de ces points, on trace les réponses associées pour la configuration nominale de masse et de centrage, ainsi que les 4 configurations extrêmes (Fig. 7.4(b)).

La Figure 8.25 permet de valider le comportement temporel du système non linéaire en boucle fermée. Le facteur de charge présente des temps de réponse inférieurs à 3.0 s pour la majo-

(a) Facteur de charge  $N_z$ (b) Variation de l'altitude  $h$  autour de la condition initiale(c) Vitesse en tangage  $q$ (d) Angle d'assiette  $\Theta$ 

(e) Variation de l'angle de la gouverne de profondeur autour de sa position d'équilibre



(f) Vitesse de la gouverne de profondeur

Figure 8.25 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour 35 conditions de vol et 5 configurations de masse et centrage

rité des conditions testées. Seuls les vols à basses vitesses et hautes altitudes donnent lieu à des temps de réponse de l'ordre de 4.0 s. Les dépassements sont quant à eux bien inférieurs à 10% pour une commande de type échelon unitaire (Fig. 8.25(a)). La variation d'altitude autour de la condition initiale engendrée par la manœuvre présente un profil uniforme pour l'ensemble des 175 configurations testées avec une perte finale d'altitude d'environ 350 m (Fig. 8.25(b)). Les vitesses en tangage présentent des dépassements légèrement inférieurs à 100% avec une vitesse en valeur absolue maximale de  $8.1^\circ/\text{s}$  pour la réponse à une commande de type échelon unitaire (Fig. 8.25(c)). L'angle d'assiette maximal obtenu en valeur absolue sur l'ensemble des configurations testées est de  $24.8^\circ$  (Fig. 8.25(d)). Finalement, le bon comportement de l'actionneur est également vérifié, ce dernier ne présentant pas de saturation ni en débattement (Fig. 8.25(e)) ni en vitesse (Fig. 8.25(f)).

### 8.3.3 Profil de vitesse

Jusqu'à présent, les simulations ont été effectuées pour des vitesses stationnaires. Il convient désormais d'évaluer l'impact de potentielles accélérations de l'avion sur le contrôle du facteur de charge. Pour cela, on présente les résultats obtenus pour une altitude de vol initiale de 7500 m et pour une vitesse de vol passant de 0.55 M à 0.85 M suivant le profil décrit à la Figure 8.26. Deux tests sont envisagés. Un premier test de type rejet de perturbation pour lequel l'entrée de contrôle demeure nulle et un second test de type poursuite correspondant à une manœuvre de type doublet.

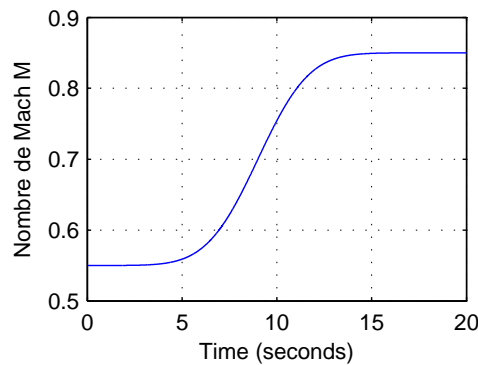


Figure 8.26 Profil de vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M

#### 8.3.3.1 Rejet de perturbation

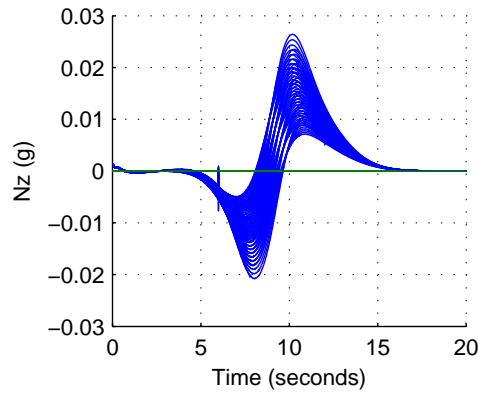
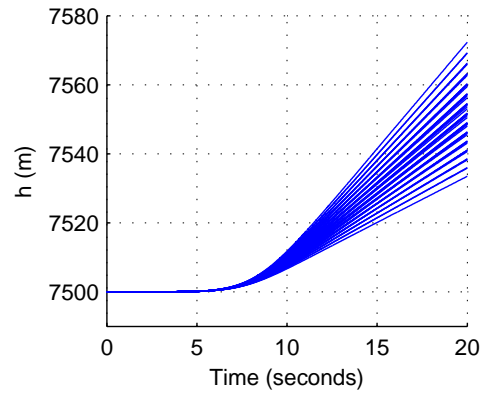
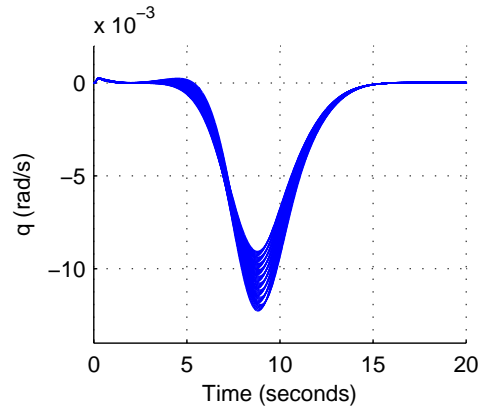
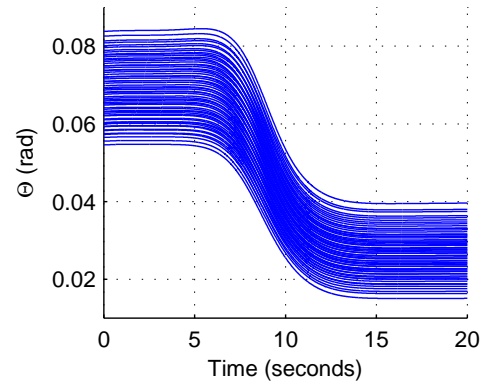
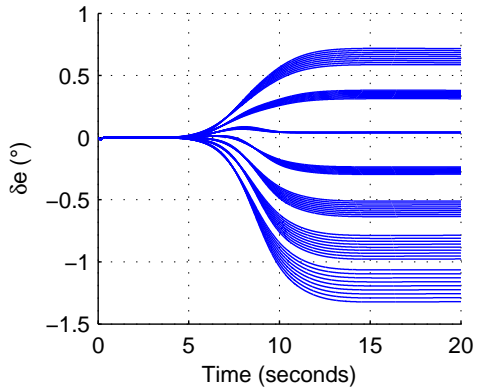
Pour les mêmes 35 configurations incertaines que précédemment, on évalue l'impact de l'accélération de l'avion sur le contrôle du facteur de charge lorsque celui-ci voit son entrée



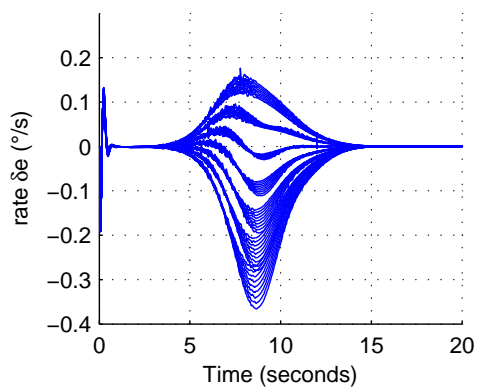
de commande être nulle (Fig. 8.27). Le contrôleur parvient, en dépit de l'accélération, à rejeter la perturbation induite sur le facteur de charge. Ce dernier atteint en effet au plus fort de l'accélération la valeur maximale de  $0.027g$  et redevient nul dès lors que l'avion cesse d'accélérer, conformément à l'entrée (Fig. 8.27(a)). Notons que la valeur initiale du facteur de charge n'est pas identiquement nulle. Ceci résulte du fait que chaque simulation est initialisée avec un point calculé via la méthode décrite en Annexe C, cette méthode ne permettant pas de rigoureusement obtenir un point d'équilibre mais un point qui s'en approche. La figure 8.27(b) montre que le contrôle du facteur de charge a permis, en dépit de l'accélération de l'avion, de voler à une altitude quasi constante. En effet, la variation d'altitude induite par le changement de vitesse est inférieure à 80 m pour l'ensemble des 35 configurations incertaines testées. La vitesse en tangage demeure quant à elle inférieure à  $0.7^\circ/\text{s}$  (Fig. 8.27(c)) pour un angle d'assiette variant sur une amplitude inférieure à  $6^\circ$  (Fig. 8.27(d)). Finalement, le bon comportement de l'actionneur est également vérifié, ce dernier ne présentant pas de saturation ni en débattement (Fig. 8.27(e)) ni en vitesse (Fig. 8.27(f)).

### 8.3.3.2 Manœuvre

Pour à nouveau les mêmes 35 configurations incertaines que précédemment, on évalue l'impact de l'accélération de l'avion sur le contrôle du facteur de charge lorsque celui-ci effectue une manœuvre de type doublet (Fig. 8.28). En dépit de l'accélération de l'avion, le contrôleur parvient à asservir de manière satisfaisante le facteur de charge lors d'une manœuvre (Fig. 8.28(a)). Sous l'effet de l'accélération de l'avion, le contrôleur peine à maintenir le régime permanent (résultat de simulation à  $T = 6.0\text{ s}$  et  $T = 12.0\text{ s}$ ) mais parvient néanmoins à annuler l'erreur en régime permanent lorsque l'accélération cesse comme le montre le résultat de simulation pour  $T \geq 16.0\text{ s}$ . Notons également que dans ce test, le plus fort de l'accélération intervient à  $T = 9.0\text{ s}$ , soit en plein milieu de la manœuvre faisant passer le facteur de charge de la valeur  $+1g$  à la valeur  $-1g$ . Cela a pour conséquence d'amplifier la valeur du dépassement, ce dernier atteignant les 20%. La variation d'altitude engendrée par la manœuvre est comprise entre 400 m et 450 m, dépendamment de la configuration des paramètres de masse et de centrage (Fig. 8.28(b)). La vitesse en tangage, à l'image du facteur de charge, voit au plus fort de l'accélération son dépassement être légèrement supérieur à celui observé pour des manœuvres effectuées à vitesse constante (Fig. 8.28(c)). L'angle d'assiette voit quant à lui son comportement être relativement uniforme sur l'ensemble du domaine incertain (Fig. 8.28(d)). Finalement, le bon comportement de l'actionneur est également vérifié, ce dernier ne présentant pas de saturation ni en débattement (Fig. 8.28(e)) ni en vitesse (Fig. 8.28(f)).

(a) Facteur de charge  $N_z$ (b) Altitude  $h$ (c) Vitesse en tangage  $q$ (d) Angle d'assiette  $\Theta$ 

(e) Variation de l'angle de la gouverne de profondeur autour de sa position d'équilibre



(f) Vitesse de la gouverne de profondeur

Figure 8.27 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M à une altitude initiale de 7500 m en l'absence d'input de contrôle pour 35 configurations de masse et centrage

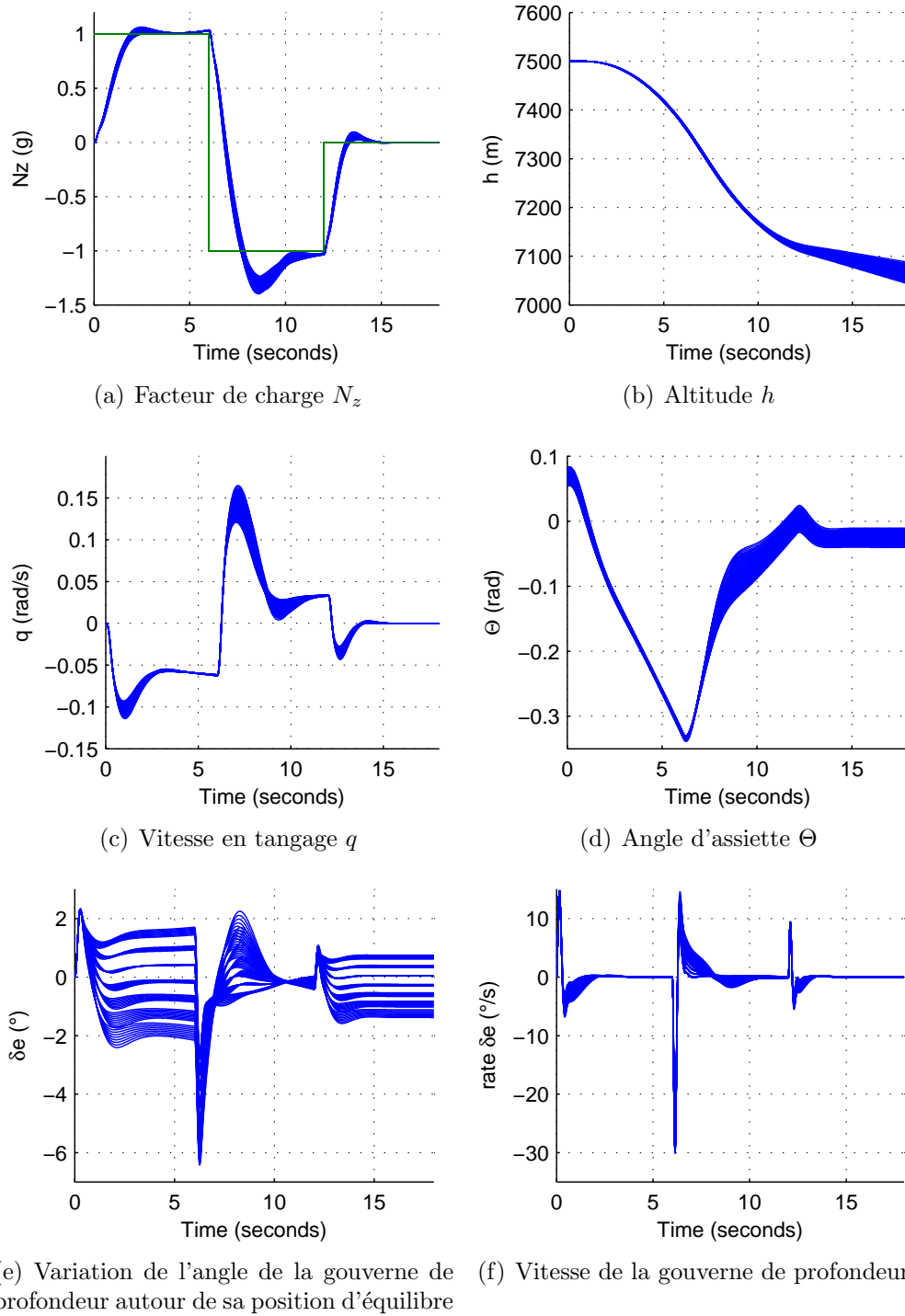


Figure 8.28 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M à une altitude initiale de 7500 m lors d'un doublet pour 35 configurations de masse et centrage

Dans le cadre d'un profil en vitesse avec une altitude de vol qui varie en fonction de la dynamique de l'avion, il est intéressant d'observer le comportement des gains du contrôleur au cours de la manœuvre (Fig. 8.29). Ces graphiques représentent l'évolution des gains du contrôleur pour les 35 configurations incertaines décrites précédemment. Ces derniers montrent que la variation des conditions de vol ont un fort impact au cours de la manœuvre sur la valeurs des gains du contrôleur. Notons que le faible impact de la configuration des paramètres masse et de centrage sur l'évolution de l'altitude (Fig. 8.28(b)) a pour conséquence un faible impact de cette dernière sur l'évolution des gains du contrôleur au cours de la manœuvre.

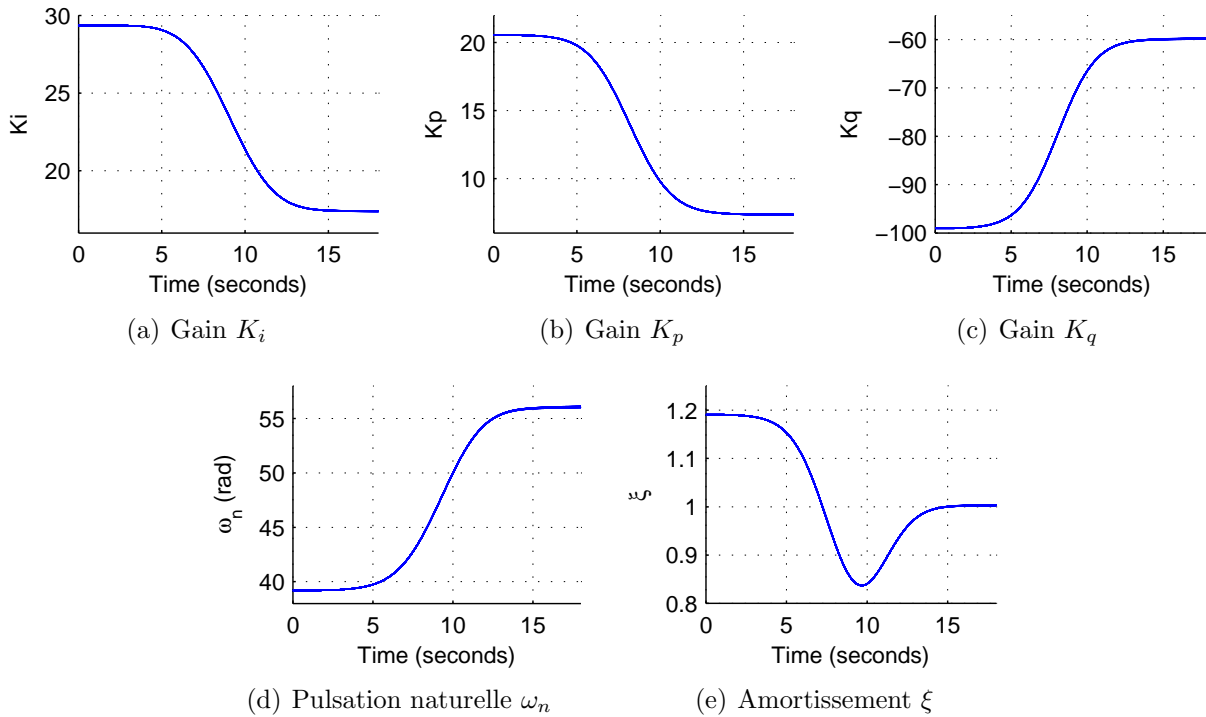


Figure 8.29 Évolution des gains du contrôleur pour une vitesse passant de 0.55 M à 0.85 M à une altitude initiale de 7500 m lors d'un doublet pour 35 configurations de masse et centrage

### 8.3.4 Variation des paramètres de masse et de centrage

On cherche ici à évaluer l'impact des variations des paramètres de masse et de centrage sur le comportement du système en boucle fermée. Dans un premier temps, de lentes variations tenant compte de la consommation des moteurs et des transferts de kérosène entre les cuves de l'avion ont été évaluées. Cette approche n'a pas permis de mettre en évidence un quelconque impact de ces variations sur la réponse de l'avion, aussi bien dans le cadre du rejet de perturbations qu'au cours de manœuvres. Pour cette raison, on se concentre dans ce qui suit au cas de rapides variations des paramètres de masse et de centrage, configurations

rencontrées dans le cadre d'un largage de matériel au cours du vol.

#### 8.3.4.1 Rejet de perturbation

On considère la configuration classique dans laquelle le largage de matériel est effectué à vitesse constante pour une entrée de commande du facteur de charge nulle. L'objectif du contrôleur est alors de rejeter la perturbation induite par le largage de matériel.

**Étude en un point de vol et identification du pire cas** Dépendamment de la position du matériel relativement à l'avion, son largage peut induire des déplacements de la position longitudinale du centre de gravité vers l'avant ou l'arrière de l'appareil. L'impact de ces déplacements a été évalué pour une vitesse de vol constante  $V_T = 0.65 M$  et une altitude initiale  $h = 5000 m$ . Pour cela, on a supposé que l'avion est initialement à l'équilibre et dans sa configuration nominale. L'appareil largue à  $T = 1.0 s$  une tonne de matériel engendrant une diminution de 10% de la valeur du coefficient d'inertie en tangage. Plusieurs déplacements du centre de gravité ont été testés,  $\Delta x$  passant de sa position nominale à savoir 0% à l'une des valeurs suivantes : -4.35%, -2.17%, 0%, 2.17% et 4.35%. Les résultats obtenus en simulation sont donnés à la Figure 8.30.

L'impact du largage de matériel sur le facteur de charge est illustré à la Figure 8.30(a), montrant que le contrôleur parvient à rejeter la perturbation induite en moins de 2.0 s avec un facteur de charge n'excédant pas, en valeur absolue, les  $0.22g$ . Il est ici intéressant de noter que le meilleur rejet est obtenu, non pas pour un centre de gravité demeurant à sa position initiale, mais se déplaçant à l'avant de l'avion. En effet, l'amplitude maximale du facteur de charge est, en valeur absolue, de  $0.22g$  pour un centre de gravité se déplaçant à l'arrière de l'appareil ( $\Delta x = -4.35\%$ ), de  $0.12g$  lorsqu'il demeure à sa position nominale ( $\Delta x = 0\%$ ) et de  $0.04g$  lorsqu'il se déplace à l'avant de l'appareil ( $\Delta x = +4.35\%$ ). Notons ensuite que l'avion conserve son altitude de vol au cours de l'opération de largage (Fig 8.30(b)). La vitesse en tangage ne présente pas de valeurs excessives (Fig. 8.30(c)) et permet d'ajuster la valeur de l'angle d'assiette afin de ramener l'avion à l'équilibre (Fig. 8.30(d)). La gouverne de profondeur ne présente pas de saturation au cours de l'opération de largage (Fig. 8.30(e) et 8.30(f)). Notons que la vitesse de la gouverne de profondeur sera d'autant plus élevée que le centre de gravité de l'avion se déplace vers l'arrière de l'appareil. Une nouvelle fois, le meilleur comportement est obtenu lorsque le centre de gravité est déplacé à l'avant de l'avion.

Cette première étude permet d'aboutir à la conclusion suivante. De manière à obtenir le meilleur rejet de perturbation possible, il faut de préférence positionner le matériel à larguer

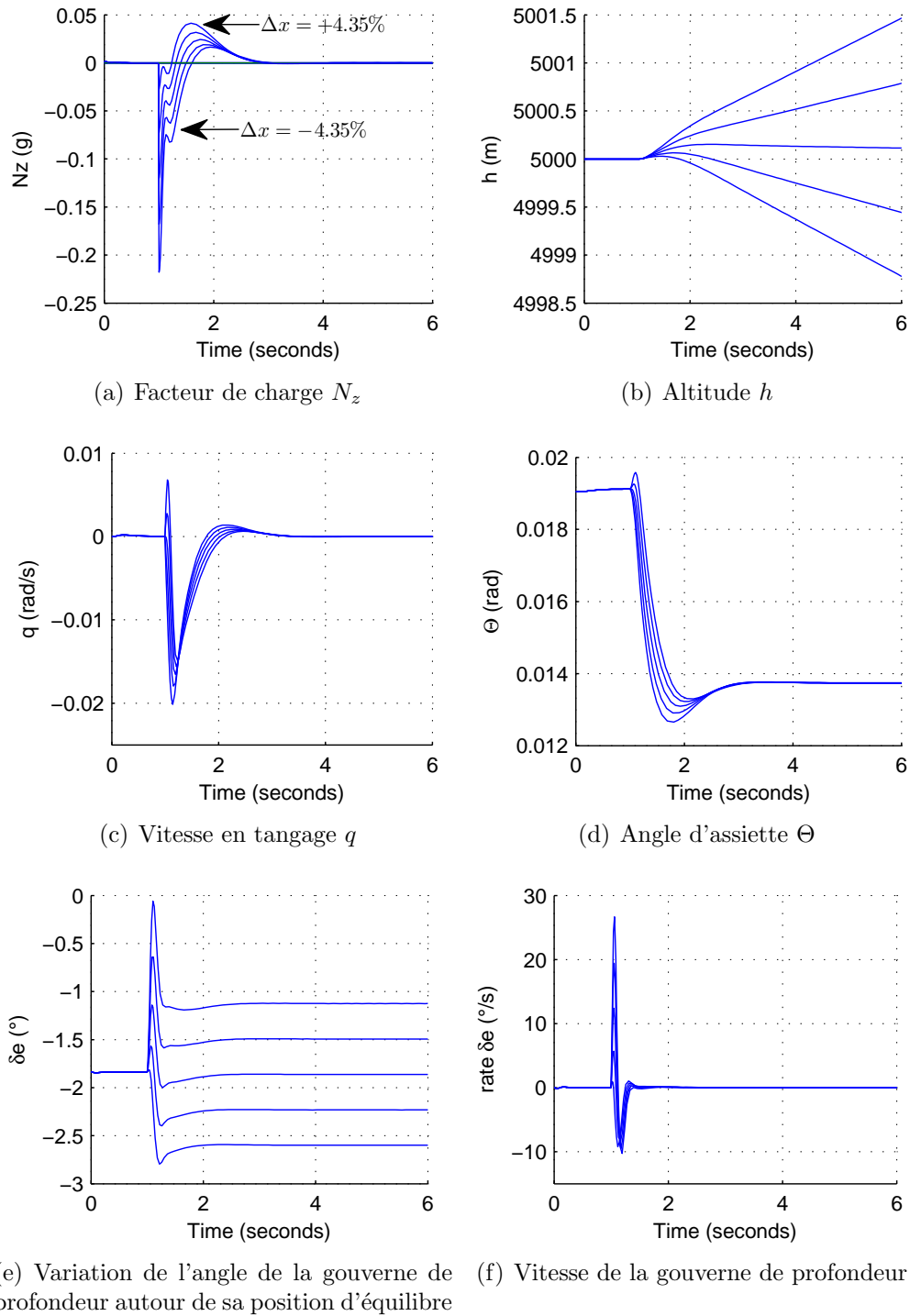


Figure 8.30 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une vitesse de 0.65 M à une altitude initiale de 5000 m en rejet de la perturbation induite par un largage de matériel pour plusieurs déplacements du centre de gravité

vers l'arrière de l'avion, de telle sorte à ce que le centre de gravité se déplace vers l'avant de l'appareil au moment du largage. Cela permet de réduire la valeur maximale de la perturbation sur le facteur de charge et de réduire la vitesse de déplacement imposée à la gouverne de profondeur. Au contraire, un placement du matériel à l'avant de l'avion conduit à un recul du centre de gravité lors du largage. La perturbation induite est alors plus forte et la gouverne de profondeur est sollicitée plus intensément.

**Étude à travers l'enveloppe de vol** On évalue à présent la réponse du système en boucle fermée à la perturbation induite par un largage de matériel pour 35 conditions de vol réparties sur l'ensemble de l'enveloppe de vol (Fig. 7.9). Pour cela, on considère le pire cas étudié au paragraphe précédent, à savoir le largage de 1 t de matériel engendrant une diminution de 10% de la valeur du coefficient d'inertie en tangage et un déplacement du centre de gravité vers l'arrière de l'avion à hauteur de  $\Delta x = -4.35\%$ . Les résultats obtenus en simulation sont donnés à la Figure 8.31.

La perturbation initiale induite par le largage de matériel au niveau du facteur de charge (Fig. 8.31(a)) est uniforme à travers l'ensemble de l'enveloppe de vol avec un maximum, en valeur absolue, de  $0.22g$ . Pour l'ensemble des configurations testées, le contrôleur parvient ensuite à rejeter la perturbation en un temps compris entre 2.0 s et 3.0 s dépendamment de la zone de vol considérée. Comme observé précédemment, l'altitude de vol demeure constante au cours de l'opération de largage (Fig. 8.31(b)). L'étude permet de valider le comportement de la vitesse de rotation en tangage (Fig. 8.31(c)) ainsi que de l'angle d'assiette (Fig. 8.31(d)). La gouverne de profondeur ne présente pas de saturation au cours de l'opération de largage, que ce soit en position (Fig. 8.31(e)) ou en vitesse (Fig. 8.31(f)).

Les résultats des simulations temporelles montrent ainsi le bon comportement de l'avion lors de l'opération de largage de matériel. Le contrôleur parvient à rejeter la perturbation induite par les brusques changements des paramètres de masse et de centrage en un temps compris entre 2.0 s et 3.0 s dépendamment de la condition de vol. Il limite également la valeur maximale de la perturbation sur facteur de charge à hauteur de  $0.22g$ . De plus, ce rejet est effectué en l'absence de variation de l'altitude de vol, cette dernière demeurant constante au cours de l'opération.

### 8.3.4.2 Manœuvre

Pour achever l'analyse sur le modèle non linéaire, on procède à une simulation dont le scénario est le suivant. L'avion vol initialement à une altitude initiale  $h_0$  prise égale à l'une

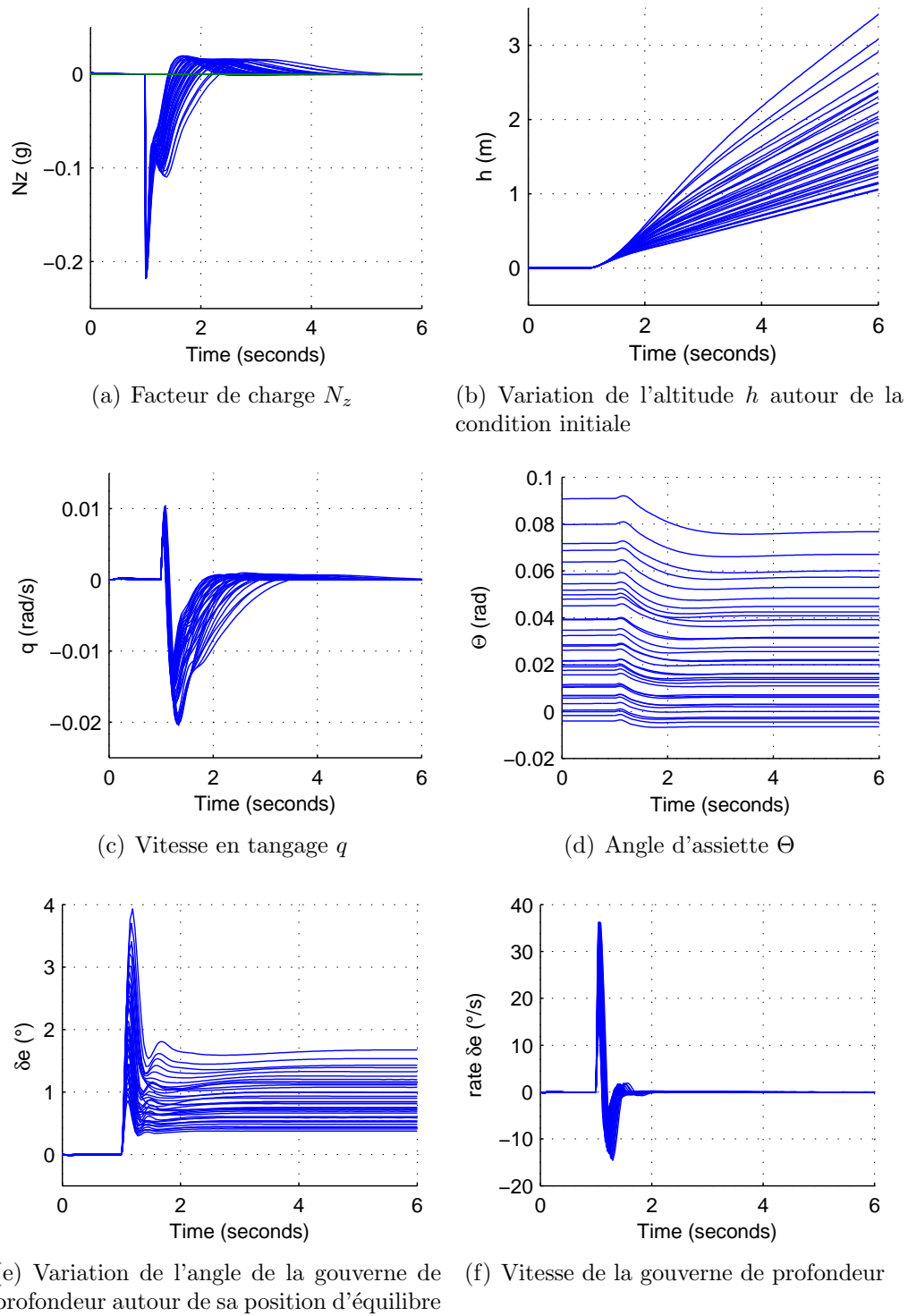


Figure 8.31 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour 35 conditions de vol en rejet de la perturbation induite par un largage de matériel dans la configuration la plus défavorable



des 10 altitudes suivantes : 1000 m, 2000 m, ..., 10000 m ; et à la vitesse minimale correspondant à cette altitude conformément à l'enveloppe de vol (Fig. 5.5). Il accélère suivant le profil de la Figure 8.32 de manière à augmenter sa vitesse de vol de 0.3 M tout en effectuant une manœuvre de type doublet. Au milieu de la manœuvre, moment qui correspond au plus fort de l'accélération de l'appareil, une opération de type largage de matériel est mise en œuvre. Cette opération a pour conséquence de réduire la masse de l'avion de 1 t, engendrant une diminution de 10% de la valeur du coefficient d'inertie en tangage et un déplacement du centre de gravité vers l'arrière de l'appareil de -4.35%.

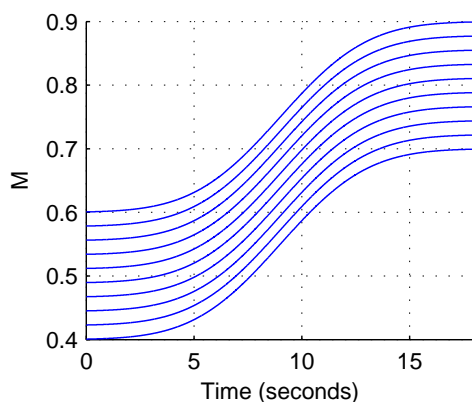


Figure 8.32 Profils de vitesse de l'avion pour l'étude du largage de matériel lors d'une manœuvre

Comme le montre la réponse du facteur de charge (Fig. 8.33(a)), le contrôleur parvient à rejeter efficacement la perturbation introduite par l'opération de largage de matériel, de telle sorte que la manœuvre continue à se dérouler dans de bonnes conditions. La perturbation induite par le largage de matériel est au maximum de  $0.5g$  pour l'ensemble des configurations testées. L'altitude de vol et l'angle d'assiette ne sont que peu impactés par le largage de matériel (Fig 8.33(b) et 8.33(d)). Du fait de la combinaison des phases d'accélération, de manœuvre et de largage, la vitesse en tangage voit sa valeur varier rapidement sur une amplitude maximale de  $0.08 \text{ rad/s}$  au moment du largage (Fig 8.33(c)). Au niveau de la gouverne de profondeur, les réponses temporelles ne présentent pas de saturation concernant l'angle de débattement (Fig 8.33(e)). On observe néanmoins une saturation en vitesse sur un laps de temps très court (environ 40 ms) suivant le largage de matériel (Fig 8.33(f)).

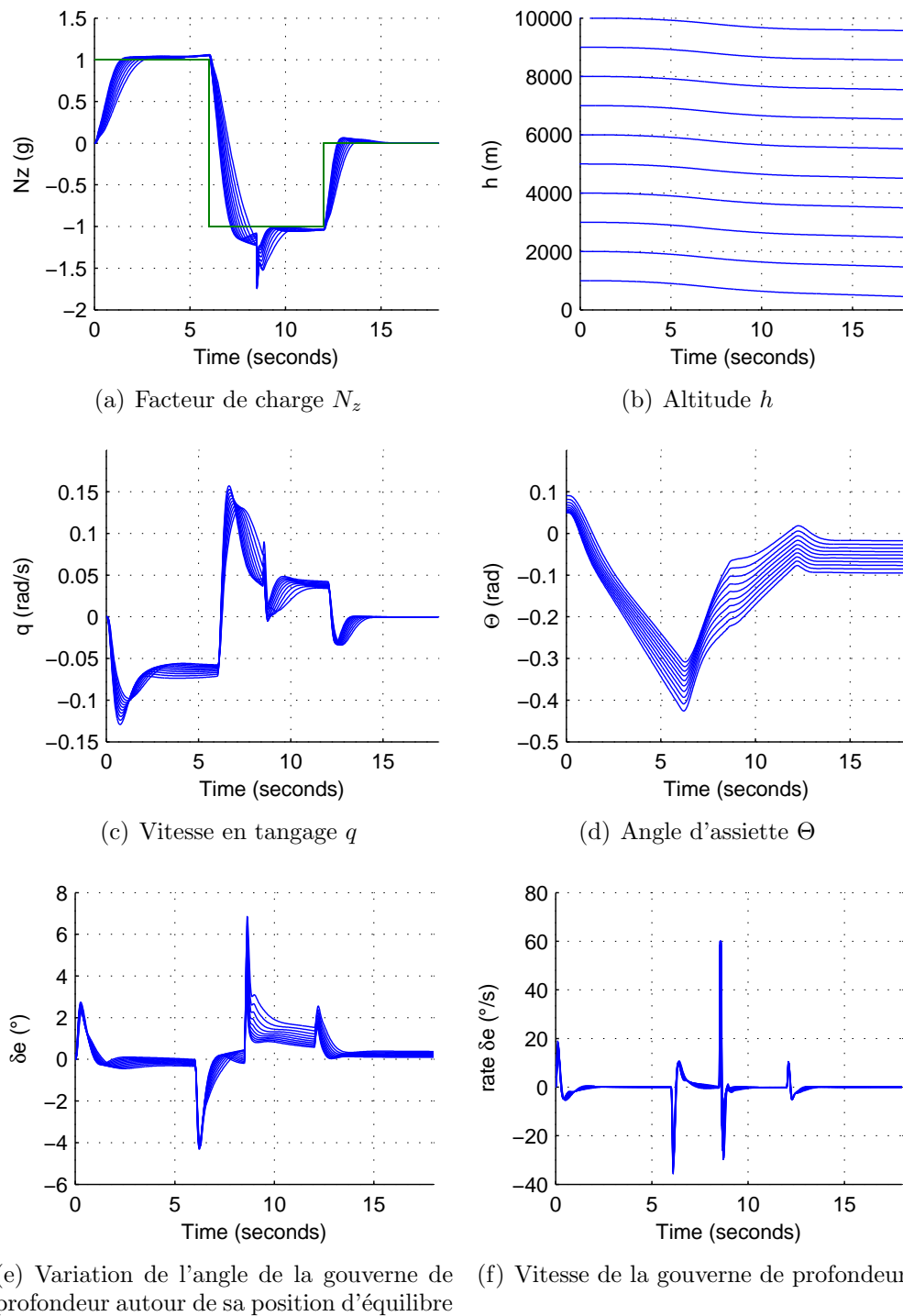


Figure 8.33 Réponses temporelles du système non linéaire en boucle fermée pour une opération de largage de matériel au cours d'une manœuvre et sous l'effet d'une accélération

Cette dernière simulation vient clore ce chapitre sur la validation du contrôleur autosé-  
quencé. L'analyse LTI a permis de vérifier la stabilité et les performances du système bouclé  
sur l'ensemble de l'enveloppe de vol pour des conditions de vol et configurations incertaines  
(masse, centrage et coefficients aérodynamiques) stationnaires. L'analyse LPV a ensuite per-  
mis de garantir la stabilité et d'évaluer le niveau de performance en poursuite pour des  
conditions de vol et paramètres de masse et de centrage variant dans le temps. L'impact des  
retards dans les mesures et en sortie du contrôleur a également été évalué. Le bon comporte-  
ment du système a finalement été vérifié à travers une série de simulations temporelles sur le  
modèle non linéaire complet de l'avion pour différentes configurations (vitesse stationnaire,  
accélération, largage de matériel, étude du pire cas). Les résultats ainsi obtenus permettent  
de valider le premier contrôleur autoséquencé synthétisé dans ce mémoire.

## CHAPITRE 9

### CONCLUSION

#### 9.1 Résultats et discussion

Le premier objectif de ce travail était d'analyser l'impact des variations de masse et de centrage sur la dynamique de l'avion. La première partie de ce projet a ainsi permis de mettre en place un modèle de la dynamique de l'avion tenant explicitement compte des paramètres de masse et de centrage. En se basant sur les équations de la mécanique des solides indéformables et en particulier les lois de Newton, des modèles non linéaires et linéarisés ont pu être mis en place en tenant explicitement compte de la masse de l'appareil et de son centrage. L'étude numérique de ces équations dans le cas du *Fighting Falcon F-16* ont permis de montrer que la position longitudinale du centre de gravité a un grand impact sur les performances et la nature des modes de la dynamique longitudinale.

Cette étude nous a poussé à nous concentrer sur le contrôle du mode *Short Period* avec l'objectif de synthétiser un contrôleur robuste aux variations de masse et de centrage. De manière à réduire la complexité du modèle, l'approximation dite du *Short Period* a été introduite et utilisée dans la synthèse. En se basant sur les critères de manœuvrabilité usuellement utilisés en aviation, un ensemble de critères à remplir a été défini (temps de réponse, amortissement, dépassement, marges de stabilité...). Ces critères devaient être satisfaits sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et être robustes aux variations des paramètres de masse et de centrage.

Le problème du séquençement des gains a été présenté. Dans sa forme classique, cette approche consiste à séquencer *a posteriori* les gains du contrôleur sous la forme de fonctions affines par morceaux des variables de séquençement. L'approche ici proposée permet de considérer la phase de séquençement des gains non pas à l'issue, mais durant la phase de synthèse via une structure de séquençement polynomiale définie *a priori*. Cette approche permet, à partir d'une architecture de contrôle et une structure de séquençement des gains définies *a priori*, de synthétiser un contrôleur robuste et autoséquenté en une seule phase de design. Pour cela, la structure de séquençement des gains est directement injectée dans l'architecture du contrôleur et les exigences du cahier des charges sont formulées sous la forme de contraintes  $H_\infty$ . De cette façon, on transpose les problèmes de synthèse robuste et d'autoséquentement

en un unique problème de synthèse  $H_\infty$  structurée.

Cette approche a été appliquée avec succès au problème du contrôle du mode *Short Period* sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. Elle a nécessité la mise en place d'une étape préliminaire visant à ajuster les contraintes  $H_\infty$  et à définir une bonne structure de séquencement des gains du contrôleur autoséquenté. Une fois cette phase accomplie, la synthèse du contrôleur robuste et autoséquenté a été mise en œuvre. Cela a conduit, au prix d'un temps de calcul élevé, à l'obtention d'un contrôleur robuste et autoséquenté rencontrant le cahier des charges sur l'ensemble de l'enveloppe de vol et du domaine incertain.

La transposition du problème de synthèse d'un contrôleur autoséquenté dans le cadre de l'optimisation multiobjectif a permis de montrer que l'introduction de coefficients de pondération pouvait modéliser les performances du système bouclé à travers l'enveloppe de vol. Ainsi, en ajustant soigneusement les coefficients de pondération en fonction des points de vol utilisés dans la synthèse, il a été montré que des améliorations significatives des performances pouvaient être apportées sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

Pour finir, un des contrôleurs obtenus lors de la phase de synthèse a fait l'objet d'une validation complète. La stabilité du système et ses performances ont tout d'abord été vérifiées sur l'ensemble de l'enveloppe de vol pour des paramètres de masse et de centrage et des coefficients aérodynamiques incertains. Cette validation a été effectuée en deux parties : une première pour des conditions de vol et paramètres incertains stationnaires puis, dans une seconde étape, variant dans le temps. Pour finir, des simulations sur le modèle non linéaire de l'avion ont permis de vérifier le bon comportement temporel du système en boucle fermée.

## 9.2 Perspectives

De manière à prolonger le travail effectué lors de ce projet, quelques pistes mériteraient d'être approfondies. La première de ces pistes serait de reprendre l'idée développée dans ce mémoire en y ajoutant les contraintes supplémentaires qui doivent être considérées dans le cadre d'un vrai programme d'avion. Mentionnons par exemple la prise en compte dans le modèle de l'avion de la dynamique des capteurs, des retards introduits par les mesures et le contrôleur, de l'ajout de *notch filters* afin d'éviter d'exciter les modes flexibles de la structure de l'avion, le modèle du manche... Un des principaux problèmes à résoudre serait alors l'accroissement des temps de calcul engendré par l'augmentation de l'ordre du modèle de l'avion. Il serait également intéressant de répéter la synthèse en considérant en plus les incertitudes

portant sur les coefficients aérodynamiques, ce qui soulèverait une nouvelle fois le problème de l'accroissement des temps de calcul. Notons de plus que `hinfstruct` est une fonction relativement récente et qui est en constante évolution. Parmi les différentes évolutions, mentionnons la fonction `sysune` qui reprend le principe de `hinfstruct` tout en offrant des possibilités supplémentaires (placement de pôles, contraintes  $H_\infty$  à satisfaire strictement). Il serait ainsi intéressant de travailler avec cette nouvelle fonction afin d'évaluer les possibilités qu'elle offre dans le cadre de la synthèse de contrôleurs autoséquencés.

Une seconde piste à explorer serait le développement de la méthode d'ajustement automatique des coefficients de pondération proposée à la Sous-Section 7.4.2. Comment choisir les fonctions de pondérations afin d'obtenir de bons résultats ? Comment les choisir de manière à ce que la méthode ne se retrouve pas bloquée en un minimum local ? Ces questions demeurent ouvertes.

### 9.3 Bilan

Pour conclure, ce projet multidisciplinaire a permis de passer à travers les différentes étapes de la synthèse d'un contrôleur pour la dynamique longitudinale d'un avion : modélisation, analyse en boucle ouverte, définition d'une architecture de contrôle, synthèse du contrôleur, problème du séquençement des gains et validation. L'accent a été mis sur la grande complexité que constitue le problème de synthèse d'un contrôleur séquencé permettant d'assurer la stabilité et les performances robustes de l'avion sur l'ensemble de son enveloppe de vol. C'est à ce prix qu'est l'accomplissement de l'un des plus vieux rêves de l'humanité.

« Une fois que vous aurez goûté au vol, vous marcherez à jamais les yeux tournés vers le ciel, car c'est là que vous êtes allés, et c'est là que toujours vous désirerez ardemment retourner. »

Léonard de Vinci

## RÉFÉRENCES

- APKARIAN, P., BIANNIC, J.-M. et GAHINET, P. (1994). Self-scheduled  $H_\infty$  control of a missile via LMIs. *Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL, USA, pp. 3312–3317.
- APKARIAN, P. et NOLL, D. (2006). Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51, pp. 71–86.
- APKARIAN, P. et NOLL, D. (2007). Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design. *Automatica*, 43, pp. 724–731.
- APKARIAN, P., NOLL, D. et PROT, O. (2009). A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex semi-infinite maximum eigenvalue functions. *Journal of Convex Analysis*, 16, pp. 641–666.
- BARBÉS, Q., SAUSSIÉ, D. et BÉRARD, C. (2013). Self-scheduling with structured  $H_\infty$  synthesis a launch vehicle application. *American Control Conference*. Washington, DC, USA, pp. 1590–1595.
- BATES, D. G., KUREEMUN, R. et MANNCHEN, T. (2003). Improved clearance of a flight control law using  $\mu$ -analysis techniques. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 26, pp. 869–884.
- BIANNIC, J.-M. et APKARIAN, P. (1999). Missile autopilot design via a modified LPV synthesis technique. *Journal of Aerospace Science and Technology*, 3, pp. 153–160.
- BIANNIC, J.-M., ROOS, C. et KNAUF, A. (2006). Design and robustness analysis of fighter aircraft flight control laws. *European Journal of Control*, 12, pp. 71–85.
- BLONDEL, V., GEVERS, M. et LINDQUIST, A. (1995). Survey on the state of systems and control. *European Journal of Control*, 1, pp. 5–23.
- BUCHARLES, A. et VACHER, P. (2002). Flexible aircraft model identification for control law design. *Aerospace Science and Technology*, 6, pp. 591–598.
- BURKE, J. V., HENRION, D., LEWIS, A. S. et OVERTON, M. L. (2006). HIFOO - A Matlab package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization. *Proc. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*. Toulouse, France, pp. 339–344.
- BURKE, J. V. et OVERTON, M. L. (1994). Differential properties of the spectral abscissa and the spectral radius for analytic matrix-valued mappings. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 23, pp. 467–488.

- CLARKE, F. H. (2013). *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*. Springer London Ltd.
- CLARKE, F. H., LEDYAEV, Y. S., STERN, R. J. et WOLENSKI, P. R. (1998). *Nonsmooth analysis and control theory*. Springer-Verlag New York Inc.
- DASGUPTA, S., CHOCKALINGAM, G., ANDERSON, B. D. O. et FU, M. (1994). Lyapunov functions for uncertain systems with application to the stability of time varying systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I : Fundamental Theory Application*, 41, pp. 93–106.
- DEODHARE, G. et PATEL, V. V. (1998). A 'modern' look at gain and phase margins : an  $h_\infty/\mu$  approach. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*. Boston, Massachusetts, USA, pp. 323–335.
- DETTORI, M. et SCHERER, C. (2000). New robust stability and performance conditions based on parameter dependent multipliers. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia, pp. 4187–4192.
- DORF, R. C. et BISHOP, R. H. (2010). *Modern control systems (12th edition)*. Prentice Hall.
- DOYLE, J. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings, Part D*, 129, pp. 242–250.
- DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P. et FRANCIS, B. A. (1989). State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34, pp. 831–847.
- ETKIN, B. et REID, L. D. (1995). *Dynamics of flight and control (third edition)*. New York ; Toronto : John Wiley & Sons.
- FAA (1974). Federal aviation regulations (FAR) part 25 : Airworthiness standards : Transport category airplanes. Rapport technique, Federal Aviation Administration (FAA).
- FAN, M. K. H., TITS, A. L. et DOYLE, J. C. (1991). Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, pp. 573–590.
- FERNANDES DE OLIVEIRA, R. et PUYOU, G. (2011). On the use of optimization for flight control laws clearance : A practical approach. *18th IFAC World Congress*. Milan, Italie, pp. 9881–9886.
- FIELDING, C., VARGA, A., BENANI, S. et SELIER, M. (2002). *Advanced Techniques for Clearance of Flight Control Laws*. New York : Springer.



- FORSSELL, L. S. (2003). Flight clearance analysis using global nonlinear optimisation-based search algorithms. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Austin, TX, USA, pp. 1023–1030.
- GAHINET, P. et APKARIAN, P. (1994). A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$ -control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4, pp. 421–448.
- GAHINET, P. et APKARIAN, P. (2011a). Decentralized and fixed structure  $H_\infty$  control in MATLAB. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, FL, USA, pp. 8205–8210.
- GAHINET, P. et APKARIAN, P. (2011b). Structured  $H_\infty$  synthesis in MATLAB. *18th IFAC World Congress*. Milano, Italy, vol. 18, pp. 1435–1440.
- HECKER, S. et VARGA, A. (2006). Symbolic manipulation techniques for low order LFT-based parametric uncertainty modelling. *International Journal of Control*, 79, pp. 1485–1494.
- HECKER, S., VARGA, A. et MAGNI, J.-F. (2005). Enhanced LFR-toolbox for Matlab. *Aerospace Science and Technology*, 9, pp. 173–180.
- HENTABLI, K., AKHRIF, O. et SAYDY, L. (2003). Robust longitudinal flight control system under weight and center of gravity uncertainty. *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Montréal, QC, Canada, vol. 3, pp. 1743–1748.
- JAA (1974). Joint aviation requirements - 25 : large aeroplanes. Rapport technique, Joint Aviation Authorities (JAA).
- JÖNSSON, U. (2001). Lecture notes on Integral Quadratic Constraints. Disponible à l'adresse web : <http://www.math.kth.se/~uj/5B5744/5B5744.html>. Consulté le 27 octobre 2013.
- JÖNSSON, U., KAO, C.-Y., MEGRETSKI, A. et RANTZER, A. (2004). *A Guide To IQC $\beta$  : A MATLAB Toolbox for Robust Stability and Performance Analysis*.
- JÖNSSON, U., KAO, C.-Y., MEGRETSKI, A. et RANTZER, A. (2013). IQC $\beta$  toolbox : A MATLAB toolbox for robust stability and performance analysis - release 32.002. Disponible à l'adresse web : <http://actrol.ee.nsysu.edu.tw/>.
- KHARITONOV, V. (1981). Distribution of the roots of the characteristic polynomial of an autonomous system. *Automation and Remote Control*, 42, pp. 589–593.
- LAWRENCE, D. A. et RUGH, W. J. (1995). Gain-scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. *Automatica*, 31, pp. 381–390.
- LEITH, D. J. et LEITHEAD, W. E. (2000). Survey of gain-scheduling analysis & design. *International Journal of Control*, 73, pp. 1001–1025.

- MAGNI, J. F., GORREC, Y. et CHIAPPA, C. (1998). A multimodel-based approach to robust and self-scheduled control design. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, Florida, USA, pp. 3009–3014.
- MARLER, R. T. et ARORA, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 26, pp. 369–395.
- MCRUER, D., ASHKENAS, I. et GRAHAM, D. (1973). *Aircraft dynamics and automatic control*. Princeton, N.J. : Princeton University Press.
- MEGRETSKI, A. et RANTZER, A. (1997). System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, pp. 819–830.
- MENON, P. P., BATES, D. G. et POSTLETHWAITE, I. (2006). Computation of worst-case pilot inputs for nonlinear flight control systems analysis. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 29, pp. 195–199.
- MIAO, Y., WANG, S. et ZHAO, Y. (2012). Study on change of aircraft center of gravity during fuel consumption. *10th IEEE International Conference on Industrial Informatics*. Beijing, China, pp. 86–90.
- MORELLI, E. A. (1998). Global nonlinear parametric modelling with application to F-16 aerodynamics. *American Control Conference*. Philadelphia, PA, USA, vol. 2, pp. 997–1001.
- NELSON, R. (1997). *Flight stability and automatic control (second edition)*. McGraw-Hill Science.
- NGUYEN, L. T., OGBURN, M. E., GILBERT, W. P., KIBLER, K. S., BROWN, P. W. et DEAL, P. L. (1979). Simulator study of stall/post-stall characteristics of a fighter airplane with relaxed longitudinal static stability. Rapport technique, NASA.
- NGUYEN, V. X. (1993). *Flight mechanics of high-performance aircraft*. Cambridge : Cambridge University Press.
- PAMADI, B. N. (2004). *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes (second edition)*. Reston, Va. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- PUYOU, G. et EZERZERE, P. (2012). Tolerance of aircraft longitudinal control to the loss of scheduling information : toward a performance oriented approach. *7th IFAC Symposium on Robust Control Design*. Aalborg, Denmark, vol. 7, pp. 393–399.
- RANTZER, A. (1996). On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *Systems & Control Letters*, 28, pp. 7–10.
- RUGH, W. J. (1991). Analytical framework for gain-scheduling. *IEEE Control Systems Magazine*, 11, pp. 79–84.

- RUGH, W. J. (1996). *Linear system theory - second edition*. Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall.
- RUGH, W. J. et SHAMMA, J. S. (2000). Research on gain-scheduling. *Automatica*, 36, pp. 1401–1425.
- SAARLAS, M. (2007). *Aircraft performance*. Hoboken, N.J. : John Wiley & Sons.
- SAFONOV, M. G., GOH, K. C. et LY, J. H. (1994). Control system synthesis via bilinear matrix inequalities. *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore, USA, pp. 45–49.
- SAUSSIÉ, D., AKHRIF, O. et SAYDY, L. (2010). Aircraft pitch rate control design with guardian maps. *18th Mediterranean Conference on Control & Automation*. Marrakech, Morocco, vol. 1, pp. 1473–1478.
- SAUSSIÉ, D., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2008). Gain-scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. Honolulu, HI, USA.
- SAUSSIÉ, D., SAYDY, L., AKHRIF, O. et BÉRARD (2011). Gain-scheduling with guardian maps for longitudinal flight control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 34, pp. 1045–1059.
- SAYDY, L., TITS, A. et ABED, E. (1990). Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, 3, pp. 345–371.
- SCHERER, C. W. et KÖSE, I. E. (2006). Robust  $H_2$  estimation with dynamic IQCs : A convex solution. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA, pp. 4746–4751.
- SESANE, O., GÁSPÁR, P. et BOKOR, J. (2013). *Robust control and linear parameter varying approaches*. Berlin ; New York : Springer.
- SHAMMA, J. S. et ATHANS, M. (1990). Analysis of gain-scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11, pp. 898–907.
- SKOGESTAD, S. et POSTLETHWAITE, I. (2005). *Multivariable feedback control : analysis and design (second edition)*. Chichester, England : John Wiley & Sons.
- STEVENS, B. L. et LEWIS, F. L. (2003). *Aircraft control and simulation (second edition)*. Hoboken, N.J. : John Wiley & Sons.
- STIWELL, D. J. et RUGH, W. J. (1999). Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, pp. 1225–1229.

- STIWELL, D. J. et RUGH, W. J. (2000). Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 36, pp. 665–671.
- SYRMOS, V. L., ABDALLAH, C. T., DORATO, P. et GRIGORIADIS, K. (1997). Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33, pp. 125–137.
- TISCHLER, M. B. (1996). *Advances in aircraft flight control*. London : Taylor & Francis.
- US DEPARTEMENT OF DEFENCE, éditeur (1990). *Flying qualities of piloted aircraft. MIL-STD-1797A*. Washington DC, Gouvernement Printing Office.
- US DEPARTEMENT OF DEFENCE, éditeur (1997). *Flying qualities of piloted aircraft. MIL-HDBK-1797A*. Washington DC, Gouvernement Printing Office.
- VARGA, A. et FIELDING, C. (2002). *Advanced techniques for clearance of flight control laws*. New York : Springer.
- VARGA, A., HANSSON, A. et PUYOU, G. (2011). *Optimization based clearance of flight control laws : a civil aircraft application*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K.
- YANG, X., ZHONG, Y., YANG, L., ZHANG, J. et SHEN, G. (2010). Modeling and attitude control of aircraft with variations in mass and center of gravity. *Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Jinan, China, pp. 323–329.
- YECHOUT, T. R. (2003). *Introduction to aircraft flight mechanics : performance, static stability, dynamic stability, and classical feedback control*. Reston, VA : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- ZAMES, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, pp. 301–320.
- ZHANG, J., YANG, L. et SHEN, G. (2009). Modeling and attitude control of aircraft with variations in mass or center of gravity. *IEEE Aerospace Conference Proceedings*. Big Sky, MT, USA, pp. 3108–3118.
- ZHOU, K. et DOYLE, J. (1998). *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall.

## ANNEXE A

### Modélisation de la dynamique de l'avion - compléments

#### A.1 Notations

Vecteur vitesse du point  $O$  par rapport à la masse d'air :

$$\mathbf{v}_{O/\text{air}}^{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} V_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{O/\text{air}}^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = V_T \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{O/\text{air}}^{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} U_s \\ V_s \\ W_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \cos(\alpha_e) + W \sin(\alpha_e) \\ V \\ -U \sin(\alpha_e) + W \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}.$$

Vecteur vitesse de rotation de l'avion :

$$\boldsymbol{\omega}_{AC/R_I}^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{AC/R_I}^{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} P_s \\ Q_s \\ R_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cos(\alpha_e) + R \sin(\alpha_e) \\ Q \\ -P \sin(\alpha_e) + R \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}.$$

Angles d'attaque, de dérapage et de pente :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W}{U}\right), \quad \alpha_x = \arctan\left(\frac{W_s}{U_s}\right), \quad \beta = \arcsin\left(\frac{V}{V_T}\right),$$

$$\sin(\gamma) = [\cos(\alpha) \cos(\beta)] \sin(\Theta) - [\sin(\Phi) \sin(\beta) + \cos(\Phi) \sin(\alpha) \cos(\beta)] \cos(\Theta).$$

Position du centre de gravité  $G$  :

$$\Delta \mathbf{r}^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r}^{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} \Delta x_s \\ \Delta y_s \\ \Delta z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \cos(\alpha_e) + \Delta z \sin(\alpha_e) \\ \Delta y \\ -\Delta x \sin(\alpha_e) + \Delta z \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}.$$

Matrice d'inertie :

$$\mathbf{I}_{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} I'_x & -I'_{xy} & -I'_{xz} \\ -I'_{xy} & I'_y & -I'_{yz} \\ -I'_{xz} & -I'_{yz} & I'_z \end{bmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_x = I_x \cos^2(\alpha_e) + I_z \sin^2(\alpha_e) - I_{xz} \sin(2\alpha_e) \\ I'_y = I_y \\ I'_z = I_x \sin^2(\alpha_e) + I_z \cos^2(\alpha_e) + I_{xz} \sin(2\alpha_e) \\ I'_{xy} = I_{xy} \cos(\alpha_e) + I_{yz} \sin(\alpha_e) \\ I'_{xz} = 1/2(I_x - I_z) \sin(2\alpha_e) + I_{xz} \cos(2\alpha_e) \\ I'_{yz} = -I_{xy} \sin(\alpha_e) + I_{yz} \cos(\alpha_e) \end{array} \right.$$

Forces aérodynamiques :

$$\mathbf{F}_a^{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix} = R_{\mathcal{R}_a/\mathcal{R}_b} \mathbf{F}_a^{\mathcal{R}_b}, \quad \mathbf{F}_a^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_a^{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} X_{a,s} \\ Y_{a,s} \\ Z_{a,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_a \cos(\alpha_e) + Z_a \sin(\alpha_e) \\ Y_a \\ -X_a \sin(\alpha_e) + Z_a \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}.$$

Moments aérodynamiques :

$$\mathbf{M}_a^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} L_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_a^{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} L_{a,s} \\ M_{a,s} \\ N_{a,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_a \cos(\alpha_e) + N_a \sin(\alpha_e) \\ M_a \\ -L_a \sin(\alpha_e) + N_a \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}.$$

Force de gravité :

$$\mathbf{P}^{\mathcal{R}_b} = mg \begin{bmatrix} -\sin(\Theta) \\ \sin(\Phi) \cos(\Theta) \\ \cos(\Phi) \cos(\Theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{\mathcal{R}_s} = mg \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_e) \sin(\Theta) + \sin(\alpha_e) \cos(\Phi) \cos(\Theta) \\ \sin(\Phi) \cos(\Theta) \\ \sin(\alpha_e) \sin(\Theta) + \cos(\alpha_e) \cos(\Phi) \cos(\Theta) \end{bmatrix}.$$

Force de poussée :

$$\mathbf{F}_T^{\mathcal{R}_b} = F_T \begin{bmatrix} \cos(\alpha_T) \\ 0 \\ -\sin(\alpha_T) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_T^{\mathcal{R}_s} = F_T \begin{bmatrix} \cos(\alpha_e + \alpha_T) \\ 0 \\ -\sin(\alpha_e + \alpha_T) \end{bmatrix}.$$

Moments induits par la force de poussée :

$$\mathbf{M}_T^{\mathcal{R}_b} = \begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_T^{\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} L_{T,s} \\ M_{T,s} \\ N_{T,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_T \cos(\alpha_e) + N_T \sin(\alpha_e) \\ M_T \\ -L_T \sin(\alpha_e) + N_T \cos(\alpha_e) \end{bmatrix}.$$

## A.2 Équations non linéaires de la dynamique de l'avion dans le repère avion

Le résultat de la projection des équations vectorielles (3.11) et (3.12) dans le repère avion est présenté ci-dessous.

### A.2.1 Équation des efforts

$$\left\{ \begin{array}{l} X_a + X_T = + mg \sin(\Theta) \\ \quad + m \left[ \dot{U} - RV + QW - (Q^2 + R^2) \Delta x + (PQ - \dot{R}) \Delta y + (PR + \dot{Q}) \Delta z \right] \\ \\ Y_a + Y_T = - mg \sin(\Phi) \cos(\Theta) \\ \quad + m \left[ \dot{V} + RU - PW + (PQ + \dot{R}) \Delta x - (P^2 + R^2) \Delta y + (QR - \dot{P}) \Delta z \right] \\ \\ Z_a + Z_T = - mg \cos(\Phi) \cos(\Theta) \\ \quad + m \left[ \dot{W} + PV - QU + (PR - \dot{Q}) \Delta x + (QR + \dot{P}) \Delta y - (P^2 + Q^2) \Delta z \right] \end{array} \right.$$

### A.2.2 Équation des moments

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a + L_T = + (I_x - m \{ \Delta y^2 + \Delta z^2 \}) \dot{P} - (I_{xy} - m \Delta x \Delta y) \dot{Q} - (I_{xz} - m \Delta x \Delta z) \dot{R} \\ \quad + (I_{xy} - m \Delta x \Delta y) PR - (I_{xz} - m \Delta x \Delta z) PQ \\ \quad - (I_y - I_z + m \{ \Delta y^2 - \Delta z^2 \}) QR - (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) (Q^2 - R^2) \\ \\ M_a + M_T = - (I_{xy} - m \Delta x \Delta y) \dot{P} + (I_y - m \{ \Delta x^2 + \Delta z^2 \}) \dot{Q} - (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) \dot{R} \\ \quad + (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) PQ - (I_{xy} - m \Delta x \Delta y) QR \\ \quad - (I_z - I_x + m \{ \Delta z^2 - \Delta x^2 \}) PR - (I_{xz} - m \Delta x \Delta z) (R^2 - P^2) \\ \\ N_a + N_T = - (I_{xz} - m \Delta x \Delta z) \dot{P} - (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) \dot{Q} + (I_z - m \{ \Delta x^2 + \Delta y^2 \}) \dot{R} \\ \quad - (I_{yz} - m \Delta y \Delta z) PR + (I_{xz} - m \Delta x \Delta z) QR \\ \quad - (I_x - I_y + m \{ \Delta x^2 - \Delta y^2 \}) PQ - (I_{xy} - m \Delta x \Delta y) (P^2 - Q^2) \end{array} \right.$$

### A.3 Équations non linéaires de la dynamique de l'avion dans le repère stabilité

Le résultat de la projection des équations vectorielles (3.11) et (3.12) dans le repère stabilité est présenté ci-dessous.

#### A.3.1 Équation des efforts

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{a,s} + X_{T,s} = -mg [-\cos(\alpha_e) \sin(\Theta) + \sin(\alpha_e) \cos(\Phi) \cos(\Theta)] + m [\dot{U}_s - R_s V_s + Q_s W_s] \\ \quad + m \left[ - (Q_s^2 + R_s^2) \Delta x_s + (P_s Q_s - \dot{R}_s) \Delta y_s + (P_s R_s + \dot{Q}_s) \Delta z_s \right] \\ \\ Y_{a,s} + Y_{T,s} = -mg \sin(\Phi) \cos(\Theta) + m [\dot{V}_s + R_s U_s - P_s W_s] \\ \quad + m \left[ (P_s Q_s + \dot{R}_s) \Delta x_s - (P_s^2 + R_s^2) \Delta y_s + (Q_s R_s - \dot{P}_s) \Delta z_s \right] \\ \\ Z_{a,s} + Z_{T,s} = -mg [\sin(\alpha_e) \sin(\Theta) + \cos(\alpha_e) \cos(\Phi) \cos(\Theta)] + m [\dot{W}_s + P_s V_s - Q_s U_s] \\ \quad + m \left[ (P_s R_s - \dot{Q}_s) \Delta x_s + (Q_s R_s + \dot{P}_s) \Delta y_s - (P_s^2 + Q_s^2) \Delta z_s \right] \end{array} \right.$$

#### A.3.2 Équation des moments

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{a,s} + L_{T,s} = + (I'_x - m \{ \Delta y_s^2 + \Delta z_s^2 \}) \dot{P}_s - (I'_{xy} - m \Delta x_s \Delta y_s) \dot{Q}_s - (I'_{xz} - m \Delta x_s \Delta z_s) \dot{R}_s \\ \quad + (I'_{xy} - m \Delta x_s \Delta y_s) P_s R_s - (I'_{xz} - m \Delta x_s \Delta z_s) P_s Q_s \\ \quad - (I'_y - I'_z + m \{ \Delta y_s^2 - \Delta z_s^2 \}) Q_s R_s - (I'_{yz} - m \Delta y_s \Delta z_s) (Q_s^2 - R_s^2) \\ \\ M_{a,s} + M_{T,s} = - (I'_{xy} - m \Delta x_s \Delta y_s) \dot{P}_s + (I'_y - m \{ \Delta x_s^2 + \Delta z_s^2 \}) \dot{Q}_s - (I'_{yz} - m \Delta y_s \Delta z_s) \dot{R}_s \\ \quad + (I'_{yz} - m \Delta y_s \Delta z_s) P_s Q_s - (I'_{xy} - m \Delta x_s \Delta y_s) Q_s R_s \\ \quad - (I'_z - I'_x + m \{ \Delta z_s^2 - \Delta x_s^2 \}) P_s R_s - (I'_{xz} - m \Delta x_s \Delta z_s) (R_s^2 - P_s^2) \\ \\ N_{a,s} + N_{T,s} = - (I'_{xz} - m \Delta x_s \Delta z_s) \dot{P}_s - (I'_{yz} - m \Delta y_s \Delta z_s) \dot{Q}_s + (I'_z - m \{ \Delta x_s^2 + \Delta y_s^2 \}) \dot{R}_s \\ \quad - (I'_{yz} - m \Delta y_s \Delta z_s) P_s R_s + (I'_{xz} - m \Delta x_s \Delta z_s) Q_s R_s \\ \quad - (I'_x - I'_y + m \{ \Delta x_s^2 - \Delta y_s^2 \}) P_s Q_s - (I'_{xy} - m \Delta x_s \Delta y_s) (P_s^2 - Q_s^2) \end{array} \right.$$



#### A.4 Étude de la singularité des représentations d'état des dynamiques latérale et longitudinale

On cherche à évaluer pour quelles configurations la représentation d'état (3.39) est singulière, c'est-à-dire quand est-ce que la matrice  $E$  n'est pas inversible, pour les dynamiques longitudinale et latérale. Les applications numériques sont basées sur les données des ouvrages (Stevens et Lewis (2003)) et (Nelson (1997)).

**Dynamique longitudinale** On cherche à évaluer l'inversibilité de la matrice  $E$  de la dynamique longitudinale (3.41) :

$$\det(E) = 0 \Leftrightarrow (U_e - Z_{\dot{\alpha}}) \left[ \frac{m}{I_y} \{ \Delta x^2 + \Delta z^2 \} - 1 \right] + M_{\dot{\alpha}} \Delta x = 0.$$

En première approximation, on néglige les coefficients  $Z_{\dot{\alpha}}$  et  $M_{\dot{\alpha}}$  qui sont faibles devant la vitesse nominale  $U_e$ . On obtient la condition suivante :

$$\det(E) = 0 \Leftrightarrow \Delta x^2 + \Delta z^2 = \frac{I_y}{m}.$$

On trouve ici un résultat concordant avec celui obtenu pour le modèle non linéaire :  $E$  n'est pas inversible lorsque le centre de gravité se situe sur le cercle  $\mathcal{C}$  centré en  $O$  et de rayon  $R_c = \sqrt{I_y/m}$ . Le Tableau A.1 donne pour quelques exemples d'avions les valeurs de tels rayons.

Tableau A.1 Valeurs de  $R_c$  rendant la dynamique longitudinale singulière

| Modèle d'avion | F-16       | F104-A     | A-4D       | Convair 880 | Boeing 747  |
|----------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| $R_c$ (m)      | $\pm 2.85$ | $\pm 3.28$ | $\pm 2.10$ | $\pm 7.62$  | $\pm 12.47$ |

Les amplitudes obtenues sont au-delà des limites admissibles pour chacun des avions considérés. La matrice  $E$  est donc inversible pour toutes les positions admissibles du centre de gravité pour les exemples présentés.

**Dynamique latérale** On cherche à évaluer l'inversibilité de la matrice  $E$  de la dynamique latérale (3.45) :

$$\det(E) = 0 \Leftrightarrow I_x \Delta x^2 - 2I_{xz} \Delta x \Delta z + I_z \Delta z^2 + (I_{xz}^2 - I_x I_z) / m = 0. \quad (\text{A.1})$$

Avec les hypothèses (A.2) largement vérifiées en aviation, on obtient que le lieu pour lequel la matrice E de la dynamique latérale n'est pas inversible est une ellipse de centre  $O$  dont la longueur des axes est donnée par (A.3) avec un demi-petit-axe orienté au premier ordre suivant l'axe  $\mathbf{x}_s$  et le demi-grand-axe suivant  $\mathbf{z}_s$ .

$$I_x < I_z, \quad I_{xz} \ll I_x, I_z. \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} \text{dga} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\frac{I_x I_z - I_{xz}}{I_x + I_z - \sqrt{(I_x - I_z)^2 - 4I_{xz}^2}}} \approx \sqrt{\frac{I_z}{m}} \\ \text{dpa} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\frac{I_x I_z - I_{xz}}{I_x + I_z + \sqrt{(I_x - I_z)^2 - 4I_{xz}^2}}} \approx \sqrt{\frac{I_x}{m}} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Des applications numériques sont données dans le Tableau A.2 pour divers modèles d'avions. Les résultats obtenus montrent une nouvelle fois que la singularité apparaît pour des déplacements du centre de gravité en dehors des plages admissibles.

Tableau A.2 Caractéristiques de l'ellipse pour laquelle la dynamique latérale linéarisée du vol en croisière est singulière

| Modèle<br>d'avion<br>$\alpha_e = 0^\circ/30^\circ$ | F-16      | F104-A    | A-4D      | Convair 880 | Boeing 747  |
|----------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-------------|
| dga (m)                                            | 3.03/2.71 | 3.31/2.89 | 2.23/2.06 | 9.82/8.55   | 15.26/14.15 |
| dpa (m)                                            | 1.18/1.79 | 0.81/1.80 | 1.17/1.44 | 1.65/5.12   | 9.24/10.88  |

## A.5 Dérivées de stabilité adimensionnées

On établit le lien entre les dérivées de stabilité et les dérivées de stabilité adimensionnées. Les grandeurs intervenant dans cette partie (coefficients aérodynamiques, moments d'inertie) sont exprimées dans le repère stabilité. Introduisons tout d'abord deux longueurs et deux temps caractéristiques :

- longueur caractéristique respectivement de la dynamique longitudinale et de la dynamique latérale :

$$l_{lo} = \frac{\bar{c}}{2}, \quad l_{la} = \frac{b}{2};$$

- temps caractéristique respectivement de la dynamique longitudinale et de la dynamique latérale :

$$t_{lo} = \frac{l_{lo}}{U_e} = \frac{\bar{c}}{2U_e}, \quad t_{la} = \frac{l_{la}}{U_e} = \frac{b}{2U_e}.$$

On définit alors les variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{cases} \hat{u} = u/U_e \\ \hat{v} = v/U_e \approx \beta \\ \hat{w} = w/U_e \approx \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{p} = t_{la} p_s \\ \hat{q} = t_{lo} q \\ \hat{r} = t_{la} r_s \end{cases}$$

Ces variables adimensionnées permettent de définir les dérivées de stabilité adimensionnées listées dans les Tableaux A.3 et A.4. L'indice « 0 » indique que la quantité est évaluée au point d'équilibre.

Tableau A.3 Coefficients aérodynamiques adimensionnés de la dynamique longitudinale

|                | $C_x$                                                                                       | $C_z$                                                                                       | $C_m$                                                                                       |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $u$            | $C_{x_u} = \left( \frac{\partial C_x}{\partial \hat{u}} \right)_0$                          | $C_{z_u} = \left( \frac{\partial C_z}{\partial \hat{u}} \right)_0$                          | $C_{m_u} = \left( \frac{\partial C_m}{\partial \hat{u}} \right)_0$                          |
| $\alpha$       | $C_{x_\alpha} = \left( \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \right)_0$                      | $C_{z_\alpha} = \left( \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \right)_0$                      | $C_{m_\alpha} = \left( \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right)_0$                      |
| $\dot{\alpha}$ | $C_{x_{\dot{\alpha}}} = \left( \frac{\partial C_x}{\partial t_{lo} \dot{\alpha}} \right)_0$ | $C_{z_{\dot{\alpha}}} = \left( \frac{\partial C_z}{\partial t_{lo} \dot{\alpha}} \right)_0$ | $C_{m_{\dot{\alpha}}} = \left( \frac{\partial C_m}{\partial t_{lo} \dot{\alpha}} \right)_0$ |
| $q$            | $C_{x_q} = \left( \frac{\partial C_x}{\partial \hat{q}} \right)_0$                          | $C_{z_q} = \left( \frac{\partial C_z}{\partial \hat{q}} \right)_0$                          | $C_{m_q} = \left( \frac{\partial C_m}{\partial \hat{q}} \right)_0$                          |
| $\delta_e$     | $C_{x_{\delta_e}} = \left( \frac{\partial C_x}{\partial \delta_e} \right)_0$                | $C_{z_{\delta_e}} = \left( \frac{\partial C_z}{\partial \delta_e} \right)_0$                | $C_{m_{\delta_e}} = \left( \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e} \right)_0$                |

Tableau A.4 Coefficients aérodynamiques adimensionnés de la dynamique latérale

|            | $C_y$                                                                        | $C_l$                                                                        | $C_n$                                                                        |
|------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\beta$    | $C_{y_\beta} = \left( \frac{\partial C_y}{\partial \beta} \right)_0$         | $C_{l_\beta} = \left( \frac{\partial C_l}{\partial \beta} \right)_0$         | $C_{n_\beta} = \left( \frac{\partial C_n}{\partial \beta} \right)_0$         |
| $p$        | $C_{y_p} = \left( \frac{\partial C_y}{\partial \hat{p}} \right)_0$           | $C_{l_p} = \left( \frac{\partial C_l}{\partial \hat{p}} \right)_0$           | $C_{n_p} = \left( \frac{\partial C_n}{\partial \hat{p}} \right)_0$           |
| $r$        | $C_{y_r} = \left( \frac{\partial C_y}{\partial \hat{r}} \right)_0$           | $C_{l_r} = \left( \frac{\partial C_l}{\partial \hat{r}} \right)_0$           | $C_{n_r} = \left( \frac{\partial C_n}{\partial \hat{r}} \right)_0$           |
| $\delta_a$ | $C_{y_{\delta_a}} = \left( \frac{\partial C_y}{\partial \delta_a} \right)_0$ | $C_{l_{\delta_a}} = \left( \frac{\partial C_l}{\partial \delta_a} \right)_0$ | $C_{n_{\delta_a}} = \left( \frac{\partial C_n}{\partial \delta_a} \right)_0$ |
| $\delta_r$ | $C_{y_{\delta_r}} = \left( \frac{\partial C_y}{\partial \delta_r} \right)_0$ | $C_{l_{\delta_r}} = \left( \frac{\partial C_l}{\partial \delta_r} \right)_0$ | $C_{n_{\delta_r}} = \left( \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r} \right)_0$ |

On cherche à présent à établir le lien entre les dérivées de stabilité et les dérivées de stabilité adimensionnées. Les conditions d'équilibre 3.27 permettent d'établir que :

$$C_{y_0} = 0.$$

Notons également que l'on a :

$$\Delta y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_{l_0} = 0 \\ C_{n_0} = 0 \end{cases}$$

Considérons  $A$  comme étant l'une des composantes  $X$ ,  $Y$  ou  $Z$  des forces aérodynamiques. On a alors l'égalité suivante :

$$A = \bar{q}SC_a = \frac{1}{2}\rho v_{G/\text{air}}^2 SC_a.$$

En dérivant par rapport à la variable  $d$ , on obtient que :

$$A_d = \left( \frac{\partial A}{\partial d} \right)_0 = \frac{1}{2}\rho S \left( \frac{\partial v_{G/\text{air}}^2}{\partial d} \right)_0 C_{a_0} + \frac{1}{2}\rho S U_e^2 \left( \frac{\partial C_a}{\partial d} \right)_0,$$

où , en supposant que l'air s'écoule en régime permanent de telle sorte que  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_e/\text{air}} = 0$  , on a la relation :

$$\mathbf{v}_{G/\text{air}} = \mathbf{v}_{O/\text{air}} + \boldsymbol{\omega}_{AC/\mathcal{R}_e} \times \Delta \mathbf{r},$$

et donc :

$$v_{G/\text{air}}^2 = (U_e + u + q\Delta z - r\Delta y)^2 + (v + r\Delta x - p\Delta z)^2 + (w + p\Delta y - q\Delta x)^2.$$

En dérivant explicitement le terme  $v_{G/\text{air}}^2$  par rapport à la variable  $d$  et en reliant  $(\partial C_a / \partial d)_0$  à l'une des dérivées adimensionnées du Tableau A.3 ou du Tableau A.4, on obtient le lien recherché entre dérivées de stabilité et dérivées de stabilité adimensionnées. En procédant de même pour les moments, on obtient de cette manière les relations résumées dans le Tableau A.5 pour la dynamique longitudinale et le Tableau A.6 pour la dynamique latérale. Ces relations sont valables pour des coefficients aérodynamiques pris dans le repère stabilité. Il faut donc prendre garde avant d'utiliser ces formules de ramener les coefficients aérodynamiques adimensionnés du repère avion vers le repère stabilité via les relations :

$$\begin{cases} C_{X_s} = C_X \cos(\alpha_e) + C_Z \sin(\alpha_e) \\ C_{Y_s} = C_Y \\ C_{Z_s} = -C_X \sin(\alpha_e) + C_Z \cos(\alpha_e) \end{cases} \quad \begin{cases} C_{l_s} = C_l \cos(\alpha_e) + C_n \sin(\alpha_e) \\ C_{m_s} = C_m \\ C_{n_s} = -C_l \sin(\alpha_e) + C_n \cos(\alpha_e) \end{cases}$$

Tableau A.5 Lien entre les dérivées de stabilité classiques et les dérivées de stabilité adimensionnées de la dynamique longitudinale

|                | $X$                                                                      | $Z$                                                                      | $M$                                                                              |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $u$            | $X_u = \frac{\rho U_e S}{2m} [C_{x_u} + 2C_{x_0}]$                       | $Z_u = \frac{\rho U_e S}{2m} [C_{z_u} + 2C_{z_0}]$                       | $M_u = \frac{\rho U_e S l_{lo}}{I_y} [C_{m_u} + 2C_{m_0}]$                       |
| $\alpha$       | $X_\alpha = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{x_\alpha}$                        | $Z_\alpha = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{z_\alpha}$                        | $M_\alpha = \frac{\rho U_e^2 S l_{lo}}{I_y} C_{m_\alpha}$                        |
| $\dot{\alpha}$ | $X_{\dot{\alpha}} = \frac{\rho U_e^2 S t_{lo}}{2m} C_{x_{\dot{\alpha}}}$ | $Z_{\dot{\alpha}} = \frac{\rho U_e^2 S t_{lo}}{2m} C_{z_{\dot{\alpha}}}$ | $M_{\dot{\alpha}} = \frac{\rho U_e^2 S l_{lo} t_{lo}}{I_y} C_{m_{\dot{\alpha}}}$ |
| $q$            | $X_q = \frac{\rho U_e S}{2m} [U_e t_{lo} C_{x_q} + 2\Delta z C_{x_0}]$   | $Z_q = \frac{\rho U_e S}{2m} [U_e t_{lo} C_{z_q} + 2\Delta z C_{z_0}]$   | $M_q = \frac{\rho U_e S l_{lo}}{I_y} [U_e t_{lo} C_{m_q} + 2\Delta z C_{m_0}]$   |
| $\delta_e$     | $X_{\delta_e} = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{x_{\delta_e}}$                | $Z_{\delta_e} = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{z_{\delta_e}}$                | $M_{\delta_e} = \frac{\rho U_e^2 S l_{lo}}{I_y} C_{m_{\delta_e}}$                |

Tableau A.6 Lien entre les dérivées de stabilité classiques et les dérivées de stabilité adimensionnées de la dynamique latérale

|            | $Y$                                                       | $L$                                                                            | $N$                                                                          |
|------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $\beta$    | $Y_\beta = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{y_\beta}$           | $L_\beta = \frac{\rho U_e^2 S l_{la}}{I_x} C_{l_\beta}$                        | $N_\beta = \frac{\rho U_e^2 S l_{la}}{I_z} C_{n_\beta}$                      |
| $p$        | $Y_p = \frac{\rho U_e^2 S t_{la}}{2m} C_{y_p}$            | $L_p = \frac{\rho U_e^2 S l_{la} t_{la}}{I_x} C_{l_p}$                         | $N_p = \frac{\rho U_e^2 S l_{la} t_{la}}{I_z} C_{n_p}$                       |
| $r$        | $Y_r = \frac{\rho U_e^2 S t_{la}}{2m} C_{y_r}$            | $L_r = \frac{\rho U_e S l_{la}}{I_x} [U_e t_{lo} C_{l_r} - 2\Delta y C_{l_0}]$ | $N_r = \frac{\rho U_e l_{la}}{I_z} [U_e t_{lo} C_{n_r} - 2\Delta y C_{n_0}]$ |
| $\delta_a$ | $Y_{\delta_a} = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{y_{\delta_a}}$ | $L_{\delta_a} = \frac{\rho U_e^2 S l_{la}}{I_x} C_{l_{\delta_a}}$              | $N_{\delta_a} = \frac{\rho U_e^2 S l_{la}}{I_z} C_{n_{\delta_a}}$            |
| $\delta_r$ | $Y_{\delta_r} = \frac{\rho U_e^2 S}{2m} C_{y_{\delta_r}}$ | $L_{\delta_r} = \frac{\rho U_e^2 S l_{la}}{I_x} C_{l_{\delta_r}}$              | $N_{\delta_r} = \frac{\rho U_e^2 S l_{la}}{I_z} C_{n_{\delta_r}}$            |

## ANNEXE B

Modélisation du *Fighting Falcon F-16*

## B.1 Caractéristiques physiques

Tableau B.1 Dimensions du F-16

|                                                                                      |                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Longueur                                                                             | $l = 15.06 \text{ m}$      |
| Envergure                                                                            | $b = 9.96 \text{ m}$       |
| Hauteur                                                                              | $h = 4.88 \text{ m}$       |
| Surface des ailes                                                                    | $S = 27.87 \text{ m}^2$    |
| Corde aérodynamique moyenne                                                          | $\bar{c} = 3.45 \text{ m}$ |
| Distance entre le pilote et la position de référence du centre de gravité de l'avion | $l_x = 4.57 \text{ m}$     |

Tableau B.2 Performances du F-16

|                                      |                                               |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------|
| Vitesse maximale au niveau de la mer | $v_{\max}^{\text{mer}} = 1.2 \text{ M}$       |
| Vitesse maximale à haute altitude    | $v_{\max}^{\text{haute alt}} = 2.0 \text{ M}$ |
| Altitude maximale                    | $h_{\max} = 15200 \text{ m}$                  |
| Vitesse maximale de montée           | $v_{\text{montee}} = 250 \text{ m/s}$         |

Tableau B.3 Paramètres de masse du F-16

|                                                 |                                       |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Masse à vide                                    | $m_{\text{vide}} = 8570 \text{ kg}$   |
| Masse armé                                      | $m_{\text{arm}} = 12000 \text{ kg}$   |
| Masse maximale au décollage                     | $m_{\max} = 19200 \text{ kg}$         |
| Masse de référence                              | $m_0 = 9300 \text{ kg}$               |
| Moment d'inertie $x$                            | $I_x = 12875 \text{ kg/m}^3$          |
| Moment d'inertie $y$                            | $I_y = 75673 \text{ kg/m}^3$          |
| Moment d'inertie $z$                            | $I_z = 85551 \text{ kg/m}^3$          |
| Produit d'inertie $xy$                          | $I_{xy} = 0 \text{ kg/m}^3$           |
| Produit d'inertie $xz$                          | $I_{xz} = 1331 \text{ kg/m}^3$        |
| Produit d'inertie $yz$                          | $I_{yz} = 0 \text{ kg/m}^3$           |
| Position de référence du centre de gravité      | $X_{\text{CG,ref}} = 0.35\bar{c}$     |
| Limite de position arrière du centre de gravité | $X_{\text{CG,aft lim}} = 0.39\bar{c}$ |

Tableau B.4 Propulsion du F-16

|                                                |                                    |
|------------------------------------------------|------------------------------------|
| Type de propulsion                             | Turboréacteur                      |
| Nombre de réacteurs                            | 1                                  |
| Angle entre la poussée et l'axe $\mathbf{x}_b$ | $\alpha_T = 0^\circ$               |
| Moment angulaire suivant l'axe $\mathbf{x}_b$  | $h_{\text{eng}} = 216.9 \text{ N}$ |
| Rapport poussée/poids                          | $R = 1.095$                        |

## B.2 Modélisation des gouvernes

Le F-16 présente les trois gouvernes classiques que sont l'aileron, la gouverne de profondeur et la gouverne de direction. Il est doté d'une gouverne supplémentaire appelée dispositif hypersustentateur ou *leading edge flap* en anglais. Cette gouverne est placée à l'arrière des ailes et vise à réduire la vitesse de décrochage pour de grands angles d'attaque en fournissant un surplus de portance à l'avion. Ces quatre gouvernes sont actionnées par des servomoteurs qui sont modélisés par des fonctions de transfert d'ordre un (Nguyen *et al.* (1979)) du type :

$$\frac{1}{\tau s + 1}.$$

La constante de temps associée à chacune des gouvernes, ainsi que leurs limitations physiques sont données dans le Tableau B.5. Notons que le dispositif hypersustentateur n'est pas contrôlé par le pilote mais directement par l'ordinateur de bord qui évalue la commande à imposer au système en fonction de l'angle d'attaque de l'avion et de sa vitesse, à travers la loi de contrôle :

$$\delta_{\text{LEF}} = 1.38 \frac{2s + 7.25}{s + 7.25} \alpha - 9.05 \frac{\bar{q}}{p_s} + 1.45.$$

Tableau B.5 Modélisation des gouvernes du F-16

| Gouverne                     | Constante de temps | Débattement                        | Vitesse                  |
|------------------------------|--------------------|------------------------------------|--------------------------|
| Aileron                      | 0.0495 s           | $\pm 21.5^\circ$                   | $\pm 80^\circ/\text{s}$  |
| Gouverne de profondeur       | 0.0495 s           | $\pm 25^\circ$                     | $\pm 60^\circ/\text{s}$  |
| Gouverne de direction        | 0.0495 s           | $\pm 30^\circ$                     | $\pm 120^\circ/\text{s}$ |
| Dispositif hypersustentateur | 0.136 s            | $0^\circ \leftrightarrow 25^\circ$ | $\pm 25^\circ/\text{s}$  |

## B.3 Coefficients aérodynamiques

Les coefficients aérodynamiques du F-16 ont été originellement diffusés à travers un rapport de la NASA (Nguyen *et al.* (1979)) sous la forme de *lookup tables*. Ces données furent



reprises afin de procéder à une modélisation polynomiale des coefficients aérodynamiques du F-16 (Morelli (1998)), modélisation pour laquelle la loi de contrôle du dispositif hypersustentateur a été directement intégrée dans les coefficients aérodynamiques de l'avion. Il est à noter que dans cette modélisation, les coefficients aérodynamiques  $M_{\dot{\alpha}}$  et  $Z_{\dot{\alpha}}$  sont nuls, leur contribution ayant été intégrée aux coefficients aérodynamiques relevant de la vitesse de rotation en tangage  $q$ . Pour des moments aérodynamiques calculés au point O, le résultat de la modélisation (Morelli (1998)) est donné ci-dessous. L'ensemble des coefficients intervenant dans ces expressions sont des fonctions polynomiales.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_x = C_x(\alpha, \delta_e) + C_{x_q}(\alpha) \frac{\bar{c}q}{2V_T} \\ C_y = C_y(\beta, \delta_a, \delta_r) + C_{y_p}(\alpha) \frac{bp}{2V_T} + C_{y_r}(\alpha) \frac{br}{2V_T} \\ C_z = C_z(\alpha, \beta, \delta_e) + C_{z_q}(\alpha) \frac{\bar{c}q}{2V_T} \\ C_l = C_l(\alpha, \beta) + C_{l_p}(\alpha) \frac{bp}{2V_T} + C_{l_r}(\alpha) \frac{br}{2V_T} + C_{l_{\delta_a}}(\alpha, \beta) \delta_a + C_{l_{\delta_r}}(\alpha, \beta) \delta_r \\ C_m = C_m(\alpha, \delta_e) + C_{m_q}(\alpha) \frac{\bar{c}q}{2V_T} \\ C_n = C_n(\alpha, \beta) + C_{n_p}(\alpha) \frac{bp}{2V_T} + C_{n_r}(\alpha) \frac{br}{2V_T} + C_{n_{\delta_a}}(\alpha, \beta) \delta_a + C_{n_{\delta_r}}(\alpha, \beta) \delta_r \end{array} \right.$$

Les formules présentées ci-dessus sont valables dans le repère avion et pour des moments aérodynamiques calculés en la position de référence du centre de gravité de l'avion<sup>1</sup>.

#### B.4 Modélisation du turboréacteur

Le F-16 est doté d'un turboréacteur permettant la postcombustion, i.e. l'obtention temporaire d'un surplus de poussée via l'injection de kérosène dans les gaz d'échappement de l'avion qui s'enflamment spontanément sous l'effet de la chaleur. La poussée unitaire produite par ce moteur est de 79 kN sans postcombustion et de 106 kN avec postcombustion.

La modélisation complète relie la position de la manette des gaz  $\delta_t \in [0; 1]$  à la poussée fournie par le turboréacteur via un premier ordre. Dans le cadre de ce projet, seule la poussée à l'équilibre nous intéresse. Cela conduit à considérer un modèle sans dynamique d'établissement de la puissance moteur. On obtient alors que la puissance du moteur à l'équilibre est fonction de la position de la manette des gaz. Cela est modélisée par la fonction affine par

---

1. Positionné à 35% mac.

morceaux :

$$P_c(\delta_t) = \begin{cases} 64.94\delta_t & si \ \delta_t \leq 0.77 \\ 217.38\delta_t - 117.38 & si \ \delta_t > 0.77 \end{cases}$$

La poussée du moteur est alors modélisée, pour une altitude allant jusque 15000 m et une vitesse inférieure à Mach 1, comme étant une fonction de l'altitude, du nombre de Mach et de la puissance du moteur :

$$F_T = \begin{cases} T_{idle}(h, M) + (T_{mil}(h, M) - T_{idle}(h, M)) \frac{P_c}{50} & si \ P_c < 50 \\ T_{mil}(h, M) + (T_{max}(h, M) - T_{mil}(h, M)) \frac{P_c - 50}{50} & si \ P_c \geq 50 \end{cases}$$

Les fonctions  $T_{idle}$ ,  $T_{mil}$  et  $T_{max}$  sont données dans (Nguyen *et al.* (1979)) sous la forme de trois tables de données. Ces tables ont fait l'objet d'une interpolation polynomiale via les polynôme interpolateurs de Lagrange de façon à obtenir une modélisation lisse par morceaux de la poussée.

## ANNEXE C

### Obtention du modèle numérique de la dynamique linéarisée du F-16

On s'intéresse à établir la démarche permettant, à partir des données du F-16, d'obtenir le modèle numérique de l'avion pour une condition de vol en croisière  $(V_T, h)$  et une configuration de masse et de centrage  $(m, \Delta x)$  données. Cela consiste à obtenir numériquement :

1. le point d'équilibre associé à la condition de vol :

$$X_{eq} = \begin{bmatrix} \alpha_e & \delta_{a,e} & \delta_{e,e} & \delta_{r,e} & \delta_{t,e} \end{bmatrix}^T ;$$

2. les matrices  $A$  et  $B$  de la représentation d'état lorsque celle-ci prend la forme classique :

$$\dot{X} = AX + BU.$$

Les étapes conduisant à l'obtention de ces deux éléments sont détaillées ci-dessous et ont été utilisées de manière systématique dans ce projet.

Pour une condition de vol donnée  $(V_T, h)$ , on rappelle que le point d'équilibre associé est solution de la condition d'équilibre (3.27). Ce système d'équations étant hautement non linéaire, on ne cherche pas à le résoudre directement. On préfère en effet transposer ce problème en un problème de minimisation d'une fonction coût. Pour cela on définit :

$$\text{Cost} = P_X \text{Cost}_X^2 + P_Y \text{Cost}_Y^2 + P_Z \text{Cost}_Z^2 + P_L \text{Cost}_L^2 + P_M \text{Cost}_M^2 + P_N \text{Cost}_N^2,$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cost}_X = X_{a,e} + \cos(\alpha_e + \alpha_T) F_{T_e} \\ \text{Cost}_Y = Y_{a,e} \\ \text{Cost}_Z = Z_{a,e} - \sin(\alpha_e + \alpha_T) F_{T_e} + mg \\ \text{Cost}_L = L_{a,e} + L_{T,e} \\ \text{Cost}_M = M_{a,e} + M_{T,e} \\ \text{Cost}_N = N_{a,e} + N_{T,e} \end{array} \right. ,$$

et où  $P_X, P_Y, P_Z, P_L, P_M$  et  $P_N$  sont des pondérations strictement positives à définir. On obtient donc que :

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \delta_a & \delta_e & \delta_r & \delta_t \end{bmatrix}^\top \text{ point d'équilibre} \Leftrightarrow \text{Cost}(X) = 0.$$

On cherche alors à résoudre le problème sous optimal suivant : étant donné un  $\varepsilon$  pris suffisamment petit, trouver  $\alpha, \delta_a, \delta_e, \delta_r$  et  $\delta_t$  tels que  $\text{Cost} < \varepsilon$ .

Dans l'ensemble de ce projet,  $\varepsilon$  a été fixé à  $10^{-15}$  et les pondérations ont été choisies comme suit :

$$P_X = 1, P_Y = P_Z = 100, P_L = P_M = P_N = 10.$$

Une fois le point d'équilibre obtenu, il suffit de calculer numériquement les dérivées de stabilité à partir des expressions polynomiales des coefficients aérodynamiques et de les injecter dans le modèle analytique de la dynamique linéarisée de l'avion. On obtient ainsi le modèle numérique linéarisé du F-16 pour la condition de vol souhaitée.

## ANNEXE D

### Gains de la synthèse préliminaire

Les tableaux ci-dessous résument les gains obtenus lors de la synthèse préliminaire des contrôleurs robustes de la Sous-Section 7.2.1.

Tableau D.1 Synthèse préliminaire : pulsation naturelle du modèle de référence  $\omega_{n,\text{ref}}$

| $\begin{matrix} \text{h (m)} \\ \text{M} \end{matrix}$ | 0.35 | 0.4  | 0.5  | 0.6  | 0.7  | 0.8  | 0.9  | 0.95 |
|--------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1000                                                   | 1.95 | 2.50 | 3.15 | 3.75 | 4.20 | 4.60 | -    | -    |
| 5000                                                   | -    | 1.45 | 1.95 | 2.40 | 2.85 | 3.20 | 3.50 | -    |
| 10000                                                  | -    | -    | 0.95 | 1.20 | 1.40 | 1.65 | 1.95 | 2.05 |

Tableau D.2 Synthèse préliminaire : gain  $K_i$

| $\begin{matrix} \text{h (m)} \\ \text{M} \end{matrix}$ | 0.35  | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.95  |
|--------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1000                                                   | 32.49 | 31.14 | 30.34 | 22.20 | 15.47 | 11.38 | -     | -     |
| 5000                                                   | -     | 45.60 | 37.32 | 27.24 | 20.74 | 15.80 | 12.39 | -     |
| 10000                                                  | -     | -     | 34.79 | 28.19 | 20.97 | 17.52 | 15.68 | 14.03 |

Tableau D.3 Synthèse préliminaire : gain  $K_p$

| $\begin{matrix} \text{h (m)} \\ \text{M} \end{matrix}$ | 0.35  | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.95  |
|--------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1000                                                   | 18.64 | 14.77 | 10.58 | 6.575 | 4.115 | 2.775 | -     | -     |
| 5000                                                   | -     | 33.21 | 20.48 | 12.42 | 8.125 | 5.526 | 3.946 | -     |
| 10000                                                  | -     | -     | 40.23 | 25.96 | 16.51 | 11.79 | 9.06  | 7.713 |

Tableau D.4 Synthèse préliminaire : gain  $K_q$ 

| $\begin{array}{c} \text{M} \\ \text{h (m)} \end{array}$ | 0.35   | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 0.9    | 0.95   |
|---------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1000                                                    | -58.26 | -44.07 | -49.39 | -37.71 | -28.56 | -22.65 | -      | -      |
| 5000                                                    | -      | -128.4 | -97.35 | -69.81 | -52.15 | -41.76 | -34.95 | -      |
| 10000                                                   | -      | -      | -176.3 | -136.1 | -105.9 | -85.77 | -70.97 | -64.54 |

Tableau D.5 Synthèse préliminaire : pulsation naturelle du *Roll-off*  $\omega_n$ 

| $\begin{array}{c} \text{M} \\ \text{h (m)} \end{array}$ | 0.35  | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.95  |
|---------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1000                                                    | 57.05 | 63.01 | 57.00 | 62.45 | 71.25 | 75.31 | -     | -     |
| 5000                                                    | -     | 38.64 | 43.24 | 49.44 | 55.73 | 61.65 | 67.37 | -     |
| 10000                                                   | -     | -     | 32.42 | 37.04 | 41.96 | 46.31 | 50.31 | 52.83 |

Tableau D.6 Synthèse préliminaire : amortissement du *Roll-off*  $\xi$ 

| $\begin{array}{c} \text{M} \\ \text{h (m)} \end{array}$ | 0.35  | 0.4   | 0.5   | 0.6   | 0.7   | 0.8   | 0.9   | 0.95  |
|---------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1000                                                    | 0.757 | 0.689 | 0.799 | 0.708 | 0.613 | 0.512 | -     | -     |
| 5000                                                    | -     | 1.40  | 1.30  | 1.01  | 0.823 | 0.712 | 0.641 | -     |
| 10000                                                   | -     | -     | 1.95  | 1.62  | 1.33  | 1.13  | 0.977 | 0.890 |

## ANNEXE E

### Analyse des performances en poursuite pour des conditions de vol variant dans le temps

Le tableau ci-dessous donne les gains de la performance en poursuite obtenus lors de l'analyse par IQC pour des conditions de vol variant dans le temps. Des vitesses limites de 0.01 M/s pour la variation du nombre de Mach et de 100 m/s pour la variation de l'altitude de vol ont été considérées.

Tableau E.1 Résultats de l'analyse IQC des performances en poursuite pour des conditions de vol variant dans le temps

| $h_{\min}$ | $h_{\max}$ | $M_{\min}$ | $M_{\max}$ | $\gamma$ | $h_{\min}$ | $h_{\max}$ | $M_{\min}$ | $M_{\max}$ | $\gamma$ |
|------------|------------|------------|------------|----------|------------|------------|------------|------------|----------|
| 1          | 2          | 0.4        | 0.5        | 0.2348   | 5          | 6          | 0.6        | 0.7        | 0.1874   |
| 1          | 2          | 0.5        | 0.6        | 0.2289   | 5          | 6          | 0.7        | 0.8        | 0.1725   |
| 1          | 2          | 0.6        | 0.7        | 0.2498   | 5          | 6          | 0.8        | 0.82       | 0.0902   |
| 1          | 2          | 0.7        | 0.73       | 0.1145   | 6          | 7          | 0.5        | 0.6        | 0.2397   |
| 2          | 3          | 0.4        | 0.5        | 0.2170   | 6          | 7          | 0.6        | 0.7        | 0.2402   |
| 2          | 3          | 0.5        | 0.6        | 0.2422   | 6          | 7          | 0.7        | 0.8        | 0.1444   |
| 2          | 3          | 0.6        | 0.7        | 0.2179   | 6          | 7          | 0.8        | 0.84       | 0.0925   |
| 2          | 3          | 0.7        | 0.75       | 0.1367   | 7          | 8          | 0.53       | 0.6        | 0.2123   |
| 3          | 4          | 0.44       | 0.5        | 0.1822   | 7          | 8          | 0.6        | 0.7        | 0.2421   |
| 3          | 4          | 0.5        | 0.6        | 0.2369   | 7          | 8          | 0.7        | 0.8        | 0.1930   |
| 3          | 4          | 0.6        | 0.7        | 0.2616   | 7          | 8          | 0.8        | 0.86       | 0.1105   |
| 3          | 4          | 0.7        | 0.77       | 0.1533   | 8          | 9          | 0.55       | 0.6        | 0.1712   |
| 4          | 5          | 0.46       | 0.5        | 0.1520   | 8          | 9          | 0.6        | 0.7        | 0.2454   |
| 4          | 5          | 0.5        | 0.6        | 0.2465   | 8          | 9          | 0.7        | 0.8        | 0.1709   |
| 4          | 5          | 0.6        | 0.7        | 0.2380   | 8          | 9          | 0.8        | 0.9        | 0.1812   |
| 4          | 5          | 0.7        | 0.77       | 0.1501   | 9          | 10         | 0.55       | 0.6        | 0.1538   |
| 4.1        | 4.5        | 0.77       | 0.78       | 0.0385   | 9          | 10         | 0.6        | 0.7        | 0.2387   |
| 4.5        | 5          | 0.77       | 0.79       | 0.0584   | 9          | 10         | 0.7        | 0.8        | 0.1923   |
| 5          | 6          | 0.48       | 0.5        | 0.1312   | 9          | 10         | 0.8        | 0.9        | 0.1712   |
| 5          | 6          | 0.5        | 0.6        | 0.2500   |            |            |            |            |          |